ÜBER DIE STRUKTUR DER LÖSUNGSMENGE DES GLOBALEN PLATEAU-PROBLEMS BEI FLÄCHEN KONSTANTER MITTLERER KRÜMMUNG

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

MICHAEL SÖLLNER

aus Hof/Saale

Bochum 1982

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547222_0013

ÜBER DIE STRUKTUR DER LÖSUNGSMENGE DES GLOBALEN PLATEAU-PROBLEMS BEI FLÄCHEN KONSTANTER MITTLERER KRÜMMUNG

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

MICHAEL SÖLLNER

aus Hof/Saale

Bochum 1982

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Dissertation eingereicht am 1.Juli 1982

Tag der mündlichen Prüfung: 7.Okt. 1982

Dekan: Prof. Dr. D. Braess

Referenten: Prof. Dr. R. Böhme, Bochum

Prof. Dr. E. Zehnder, Bochum

Prof. Dr. F. Tomi, Saarbrücken

Inhalt:

Einleitung 1

Kap. I Die Grundlagen der Theorie 9

1.1. Grundlegende Definitionen und Rechnungen 9

1.2. Die Menge der H-Extremalen 18

1.3. Einbeziehung der Plateau-Randbedingungen 27

Kap. II Ein Ansatz zur globalen Betrachtung des Plateau-Problems 34

2.1. Der Konformitätsoperator 35

2.2. Die erzwungenen Jacobifelder - Verzweigungspunkte 42

Kap. III Analysis des globalen Plateau-Problems 54

3.1. Über H-Extremalen mit vorgeschriebenem Verzweigungsverhalten 56

3.2. Die H-Flächen in n^{λ} 62

3.3. Der Indexsatz 7o

Kap. IV Anwendung: Konstruktion vieler Lösungen 74

Anhang 96

5.1. Zur Differentialgeometrie von H-Flächen 96

5.2. Die infinitesimalen Variationen von H-Flächen 98

Liste der Bezeichnungen und Definitionen 105

Literaturverzeichnis 106

Einleitung

Anfang der siebziger Jahre erregte der Stuttgarter Architekt Prof. Frei Otto Aufsehen mit seinen ungewöhnlichen Dachkonstruktionen wie etwa dem Olympia-Dach in München, an dessen Ausgestaltung er mit seinem Institut maßgeblich beteiligt war. Liest man in den Publikationen dieses "Instituts für leichte Flächentragwerke" ([40], [41]) nach, so findet man, daß als Grundformen solcher Dächer oft Flächen dienen, wie sie im Kleinen jedem von Seifenblasen und -lamellen her bekannt sind. Genau diese Analogie wird von den Stuttgarter Ingenieuren auch zum experimentellen Studium der Formgebung bei "leichten Flächentragwerken" verwendet.

Mathematisch gesehen handelt es sich dabei um Minimalflächen, bzw. allgemeiner um Flächen konstanter mittlerer Krümmung. (Diese treten in der Natur beispielsweise als Grenzschichten von Flüssigkeiten auf, wenn zwischen beiden Seiten der Oberfläche ein Druckunterschied herrscht, [56]).

In dieser Arbeit sollen von der mathematischen Seite Aspekte des globalen Plateau-Problems für Flächen konstanter mittlerer Krümmung - kurz: H-Flächen - behandelt werden. Bevor wir dies näher erläutern, erinnern wir an das klassiche Plateau-Problem: Darunter versteht man ja die Auf-

gabe, zu einer vorgegebenen festen geschlossenen Kurve $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ diejenigen H-Flächen zu finden, die von Γ berandet werden. Analytisch ausgedrückt:
Gesucht ist für $H \in \mathbb{R}$ eine Abbildung $f : B \to \mathbb{R}^3$ (B Einheitskreisscheibe), die erfüllt:

1) die Differentialgleichung $\Delta f = 2H\, f_x \wedge f_y$

2) die sog. Konformitätsbedingung $f_x \cdot f_x = f_y \cdot f_y$, $f_x \cdot f_y = 0$

3) die Randbedingung: Es gibt einen Homöomorphismus u von ∂B mit $f_{/\partial B} = \alpha \circ u$, wo $\alpha : \partial B \to \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung von Γ darstellt.

Dies ist im Grunde genommen eine geometrische Fragestellung, wobei für die differentialgeometrische Deutung der Gleichung (1) die Bedingung (2) wesentlich ist. Im Fall $H = 0$ erhält man die Gleichungen der Minimalflächen und in dem entsprechenden Plateau-Problem eines der ältesten Probleme der Variationsrechnung überhaupt.

Wie dort, so bekommt man auch Lösungen des Plateau-Problems für Flächen konstanter mittlerer Krümmung als kritische Punkte eines Energiefunktionals $\mathbb{E}$, nämlich

$$\mathbb{E}(f) = \frac{1}{2} \int_B f_x^2 + f_y^2 + \frac{4}{3} H\, f_x \wedge f_y \cdot f \, d\lambda ,$$

variiert auf der Menge der Abbildungen, deren Randwerte nur Umparametrisierungen von α darstellen.

Diese Tatsache, zusammen mit den direkten Methoden der Variationsrechnung, benützten seit 1954 viele Autoren

(z.B. Heinz [19], Werner [55], Hildebrandt [28], Wente [54], Steffen [45]), um die Existenz von Lösungen zu beweisen. Als Schwierigkeit erweist sich dabei die quadratische Nichtlinearität der Gleichung (1), was zur Folge hat, daß man eine a-priori-Abschätzung z.B. von der Form

$$\|f\|_\infty \cdot |H| < c \quad \text{mit } 0 < c \leq 1$$

fordern muß, d.h. man beschränkt sich auf die Betrachtung der sog. "kleinen" H-Flächen. Der Verbesserung dieser Abschätzung diente vorwiegend die Reihe obengenannter Arbeiten; eine abschließende Behandlung ohne diese Bedingung steht noch aus.

Unter den genannten Voraussetzungen ist es auch möglich, die Regularität von schwachen Lösungen, wie man sie durch die direkten Methoden erhält, zu zeigen (Hildebrandt [26], Heinz [22], [24]). Im wesentlichen gilt, daß die Regularität der H-Fläche f von der Regularität der Randkurve α bestimmt wird.

Nachdem Existenz- und Regularitätsfragen weitgehend gelöst waren, hat sich das Interesse der Mathematiker auf die Frage der Anzahl von Lösungen konzentriert. Bei den Minimalflächen kann man wegen der Einfachheit der Gleichungen noch Randkurven angeben, die offensichtlich mehrere Lösungen beranden. Gelingt dies auch bei H-Flächen nicht mehr explizit, so zeigt es doch, daß man Eindeutigkeit selbst der kleinen Lösungen i.a. nicht erwarten kann (vgl. jedoch [43]). Versucht man, das Problem theoretisch mit Morse-Theorie zu be-

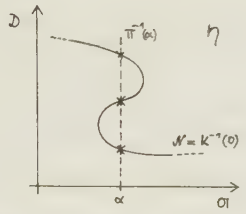
handeln (etwa wie bei den Geodätischen), so erkennt man, daß der Anwendung zwei Tatsachen entgegenstehen: Einmal sind die kritischen Punkte des Funktionals E entartet, und zweitens ist für das Plateau-Problem keine geeignete Kompaktheitsbedingung nachzuweisen.

In dieser Situation ist es in den letzten Jahren Böhme, Tromba und Tomi gelungen, im Fall der Minimalflächen neue Methoden anzuwenden (siehe [13], [15], [48], [49], [52]), die zur sog. "Globalen Analysis" zählen, einer Theorie, die Ideen der endlich-dimensionalen Differentialgeometrie und -topologie auf Funktionenräume überträgt (siehe [17], [42]). Wir versuchen, in der gleichen Richtung weiterzuwirken und eine entsprechende Theorie für H-Flächen zu erstellen.

Der wesentliche Fortschritt in obengenannten Arbeiten ist, daß nicht mehr die Lösungen zu einer fest vorgegebenen Randkurve α betrachtet werden, sondern daß man die Gesamtheit der Lösungen in Abhängigkeit von allen zulässigen Randkurven behandelt. Die Bestimmung der Lösungsmenge in diesem Sinn nennen wir das "globale Plateau-Problem".

Zu dessen Untersuchung werden die Gleichung (1) und die Randbedingung (3) getrennt von der Konformitätsbedingung (2). Für jede zulässige Randkurve $\alpha \in \mathcal{O}$ bilden wir die Mannigfaltigkeit $\eta(\alpha)$ derjenigen Abbildungen, die der Differentialgleichung (1) und Randbedingung (3) genügen. Daraus läßt sich das Bündel $\eta := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{O}} (\alpha, \eta(\alpha))$ bilden, das über

dem Basisraum $\mathfrak{A}$ alle Lösungen mit dem richtigen Randverhalten zusammenfaßt. Die Fasern $\pi^{-1}(\alpha)$ sind nichts anderes als $\eta(\alpha)$ (Kap. I).



Auf dem Bündel η wird ein "Konformitätsoperator" K mit Werten in einem Hilbertraum definiert, der genau dann den Wert 0 annimmt, wenn die Konformitätsbedingung (2) erfüllt ist. Somit haben wir eine Abbildung, deren Nullstellen genau die H-Flächen in η charakterisieren. Daraus ergeben sich zwei Möglichkeiten der Betrachtung:

(i) $K^{-1}(0)$ als Untermenge von η, oder

(ii) $K^{-1}(0)$ über dem Basisraum $\mathfrak{A}$, was offenbar mit Stabilität gegen Störungen der Randkurve zu tun hat.

Dem ersten Punkt ist Kap. II und III gewidmet. Die Hoffnung, daß $K^{-1}(0)$ in η eine Untermannigfaltigkeit darstellt, bestätigt sich nicht. Bei der Untersuchung des Differentials von K zeigt sich, daß es nicht surjektiv ist und daß darüber hinaus die Kodimension des Bildes nicht lokal konstant ist. Jedoch läßt sich das L^2-Komplement des Bildes des Differentials charakterisieren durch Anzahl und Ordnung der Verzweigungspunkte der H-Fläche f

($\hat{=}$ Nullstellen von $\frac{\partial}{\partial z} f$). Deshalb gelingt es zu zeigen, daß in einem auf vorgeschriebenen Verzweigungstyp eingeschränkten Bündel η^{λ} die H-Flächen eine Untermannigfaltigkeit bilden (Satz 3.15.).

Die Untersuchung bez. (ii) wird dadurch vorgenommen, daß wir die Bündelprojektion π auf $K^{-1}(0)$ einschränken. Damit erscheinen die Lösungen des Plateau-Problems zu α als Lösungen eines "inversen Problems" $\pi^{-1}(\alpha) \cap K^{-1}(0)$. Als Hauptergebnis erhalten wir, daß die so eingeschränkte Projektion in einer H-Fläche f einen (nicht-linearen) Fredholm-Operator bildet, dessen Index wir (wieder in Termen der Verzweigungspunkte von f) berechnen können (Satz 3.17.). Diese Eigenschaft erweist sich für viele Anwendungen als überaus nützlich, wie die Theorie der Minimalflächen zeigt (vgl. [11], [15], [48], [49], [52]).

In Kap. IV wenden wir die gewonnenen Ergebnisse an, um durch Störung von vorgegebenen Sphären Randkurven (in der Umgebung der zweimal durchlaufenen Kreislinie) zu erzeugen, die eine beliebig vorgegebene Anzahl von verschiedenen H-Flächen beranden. Dies basiert auf einer geschickten Ausnützung der Eigenschaften der konformen Gruppe des Einheitskreises, die auf Böhme [12] zurückgeht.

Im Anhang werden Rechnungen zur Differentialgeometrie von H-Flächen bereitgestellt, die in den Kapiteln vorher benötigt werden.

Unsere Resultate sind im Fall $H = 0$ der Minimalflächen bekannt. ([52], [15], [12]); doch gibt es nur wenige Untersuchungen über die Struktur der Lösungsmenge des Plateau-Problems bei H-Flächen ([47], [14]). Die Methoden, die wir verwenden, basieren im wesentlichen auf den von Böhme und Tromba entwickelten Theorien; insbesondere handelt es sich nicht um Störungssätze von Minimalflächen für kleines H !

Zur Darstellung der H-Flächen verwenden wir kein Analogon zum "Tromba'schen Vektorfeld X" (vgl. [52]), sondern immer nur den Konformitätsoperator K. Bedingt durch die nichtlineare Differentialgleichung können wir uns nicht so sehr auf die elementare Funktionentheorie stützen, was vor allem Probleme bei Existenzfragen von Lösungen mit vorgeschriebenem Nullstellenverhalten erzeugt. Eine andere Auswirkung der Nichtlinearität ist eine strikte Unterscheidung bei den Funktionenräumen zwischen Mannigfaltigkeit und ihrem Tangentialraum. Dies, zusammen mit unserer Darstellung des Konformitätsoperators kann rückwirkend vielleicht auch einem tieferen Verständnis des Falls der Minimalflächen dienen. Unser Anwendungsbeispiel zeigt darüber hinaus, wie "unberechenbar" die Lösungsmenge sich verhalten kann - bei Randkurven mit einer Totalkrümmung bis zu 4π Eindeutigkeit [43], knapp darüber schon beliebig viele Lösungen.

Bei all unseren Untersuchungen machen wir neben geeigneten Regularitätsvoraussetzungen die Einschränkungen, daß f nur innere Verzweigungspunkte besitzt und daß $f_{|\partial} \cdot H \neq 1/2$.

Die letzte Bedingung dient lediglich dazu, die eindeutige lokale Lösbarkeit des Dirichletproblems für die H-Flächen-Gleichung zu sichern. Sonst ist die Arbeit so ausgelegt, daß alle Ergebnisse auch für große H-Flächen gelten.

Diese Arbeit entstand auf Anregung von
Herrn Prof.Dr. R. Böhme, Bochum.
Ihm danke ich ganz besonders für seine hilfreichen Anmerkungen und Kommentare.

Weiterhin gilt mein Dank Herrn Prof.Dr. E. Zehnder,Bochum, Herrn Prof.Dr. F. Tomi, Saarbrücken, und unserem Dekan, Herrn Prof.Dr. D. Braess, für ihren Einsatz bei der Abwicklung des Promotionsverfahrens.

Nicht zuletzt möchte ich mich bei Herrn Dr. P.-A. Ivert und Herrn J. Kampmann für ihre kollegiale Anteilnahme bedanken.

Kap. I Die Grundlagen der Theorie

1.1 Grundlegende Definitionen und Rechnungen

Dieses erste Kapitel ist vor allem der Einführung unserer Notation, vorbereitenden Rechnungen und der Darlegung unserer Sicht des Plateau-Problems bei H-Flächen gewidmet.

Wir werden unsere Überlegungen zum großen Teil auf einer Hilbertraum-Theorie aufbauen. Deshalb wählen wir als Funktionenräume die Sobolev-Räume $H^s(B,\mathbb{R}) = W^{s,2}(B,\mathbb{R})$, $s \in \mathbb{N}_0$, der reellen Funktionen auf B, die zusammen mit ihren verallgemeinerten Ableitungen bis zur Ordnung s quadratintegrierbar sind. B bezeichnet immer die Einheitskreisscheibe $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$. Das Skalarprodukt für $g,h \in H^s(B,\mathbb{R})$ ist gegeben durch

$$\langle g,h\rangle_{H^s} := \int_B \sum_{0\le k_1+k_2\le s} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k_1}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k_2} h \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{k_1}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k_2} g \, dx$$

Wir halten uns dabei an die Theorie, wie sie ausführlich in [3] und [37] behandelt wird. Danach ergibt sich auch, daß die Einschränkungen, die "Spuren", der $H^s(B,\mathbb{R})$-Funktionen, $s \in \mathbb{N}$, $s \ge 1$, auf die Einheitskreislinie ∂B den Raum $H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R})$ bilden. Die Zugehörigkeit zu $H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R})$ prüft man am schnellsten mit Hilfe der Fourierentwicklung. Ist $\sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k e^{ik\phi}$, $\phi \in \mathbb{R}$, die Fourierreihe, die zu der $L^2(\partial B,\mathbb{R})$-Funktion h gehört, so gilt

([9], p. 165 ff.):

$$h \in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R}) \Leftrightarrow \sum_{k\in\mathbb{Z}} (1+k^2)^{s-\frac{1}{2}} |a_k|^2 < \infty$$

Man kann diese Funktionenräume leicht auf den Fall von Abbildungen mit Werten im $\mathbb{R}^3$ verallgemeinern. Wir definieren für $s \in \mathbb{N}_o$:

$$f = (f_1, f_2, f_3) \in H^s(B, \mathbb{R}^3) \Leftrightarrow f_j \in H^s(B, \mathbb{R}) \text{ für } j=1,2,3$$

und versehen $H^s(B, \mathbb{R}^3)$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle g,h \rangle_{H^s} := \sum_{j=1}^{3} \langle g_j, h_j \rangle_{H^s} ,$$

wo $g = (g_1, g_2, g_3)$, $h = (h_1, h_2, h_3) \in H^s(B, \mathbb{R}^3)$. Analog gehen wir bei $H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R}^3)$ vor. Es ist offensichtlich, daß die Spursätze und die Sobolev'schen Einbettungssätze auf die vektorwertigen Abbildungen übertragen werden können. $C^{k,\alpha}(B, \mathbb{R}^3)$ bzw. $C^{k,\alpha}(\partial B, \mathbb{R}^3)$, $k \in \mathbb{N}$, $0 < \alpha \leq 1$, bezeichnet wie z.B. in [26] den Raum der k-mal stetig differenzierbaren Abbildungen, deren k-te Ableitungen noch hölderstetig (mit Exponenten α) sind.

Wir wählen nun ein beliebiges, im Rahmen unserer Untersuchungen aber festes $H \in \mathbb{R}$.

1.1.Definition:

Ein $f \in H^2(B, \mathbb{R}^3)$ heißt H-Extremale, oder wir sagen auch: f erfüllt die H-Flächen-Gleichung, wenn fast überall auf B gilt:

$$\Delta f = 2H\, f_x \wedge f_y \qquad (1.1.1)$$

Dabei ist $\Delta f = \begin{pmatrix} \Delta f_1 \\ \Delta f_2 \\ \Delta f_3 \end{pmatrix}$, $f_x = \frac{\partial}{\partial x} f$, $f_y = \frac{\partial}{\partial y} f$

und "Δ" bezeichnet das Kreuzprodukt von Vektoren im $\mathbb{R}^3$. f erfüllt die Konformitätsbedingung, wenn fast überall auf B gilt:

$$f_x \cdot f_y = 0, \quad f_x \cdot f_x = f_y \cdot f_y \tag{1.1.2}$$

Dabei bezeichnet "$\cdot$" das euklidische Skalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^3$.

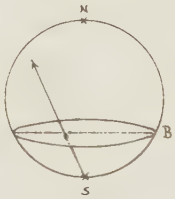
Eine Abbildung f, die (1.1.1) und (1.1.2) erfüllt, heißt Fläche konstanter mittlerer Krümmung oder kurz H-Fläche.

Dabei ist die spezielle Wahl der Koordinaten, vermittelt durch die Konformitätsrelation (1.1.6) für die differentialgeometrische Deutung der Gleichung entscheidend.

Für ein $f \in C^2(B,\mathbb{R}^3)$, das den Beziehungen (1.1.1) und (1.1.2) genügt, kann $f_x(x_o,y_o) = f_y(x_o,y_o) = 0$ nämlich nur an isolierten Stellen $(x_o,y_o) \in B$ angenommen werden, die sich im Innern von B nicht häufen. Dies folgt aus einer Analytizitätseigenschaft, die wir später beweisen werden. Daher bildet dieses f die Parametrisierung einer verallgemeinerten differentialgeometrischen Fläche (im Sinne von Nitsche, [39], § 283). Eine solche Fläche kann zwar Selbstdurchdringungen besitzen, sieht aber außerhalb der Nullstellenmenge von f_x bzw. f_y lokal wie eine 2-dim. Mannigfaltigkeit aus, deren mittlere Krümmung konstant gleich H ist. Bei $H=0$ erhält man Minimalflächen . Die Parametrisierung über B hat zur Folge, daß

wir nur H-Flächen vom topologischen Typ der Kreisscheibe untersuchen.

Leider gibt es - außer für Minimalflächen - kaum explizite Darstellungen von beschränkten H-Flächen. Das bekannteste Beispiel bilden die Kugelschalen vom Radius $R > 0$, deren mittlere Krümmung H offensichtlich überall den Wert $1/R$ besitzt. Die konforme Parametrisierung erzeugt man dabei durch stereographische Projektion der Sphärenkappen auf die Einheitskreisscheibe vom Südpol aus (vgl. [21]).



Trotz des Fehlens expliziter Beispiele ist die Existenz von beliebig vielen H-Flächen gesichert, die nicht aus Sphärenstücken bestehen. Man erhält sie als Lösungen eines speziellen Randwertproblems, des sog. Plateau-Problems.

Das klassische Plateau-Problem besteht darin, zu einer als geometrisches Objekt vorgegebenen glatten geschlossenen Jordankurve Γ im $\mathbb{R}^3$ eine H-Fläche zu finden, die von dieser Kurve berandet wird. Analytisch ausgedrückt:

1.2. Definition:

Sei $\alpha : \partial B \to \mathbb{R}^3$ eine C^1-Einbettung (d.h. $\alpha \in C^1(\partial B, \mathbb{R}^3)$, injektiv, $|\alpha'| \neq 0$), $\alpha(\partial B) =: \Gamma$.

Die H-Fläche $f \in H^2(B,\mathbb{R}^3)$ löst das Plateau-Problem zu Γ, wenn es einen Homöomorphismus $u : \partial B \to \partial B$ gibt, so daß $f_{/\partial B} = \alpha \circ u$.

In dieser Arbeit wollen wir versuchen, Einblicke in die Struktur der Lösungsmenge des Plateau-Problems zu gewinnen, insbesondere über die Abhängigkeit von der Randkurve α.

Dieses Vorhaben können wir nicht in voller Allgemeinheit durchführen; wir müssen uns auf eine wesentliche Teilklasse beschränken. Die Einschränkungen sind im einzelnen:

(1) Regularitätsforderungen, die in unserer Methode begründet liegen. Wir untersuchen H-Flächen $f \in H^s(B,\mathbb{R}^3)$, die das Plateau-Problem zu Randkurven $\alpha \in H^{s+2-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R}^3)$ lösen für festes, genügend großes $s \in \mathbb{N}$.

(2) Ausschluß von Randverzweigungspunkten, d.h. wir fordern, daß die zulässigen Umparametrisierungen der Randkurve α Diffeomorphismen der Klasse $H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B,\partial B)$ sind. Eine Einbeziehung der Randverzweigungspunkte scheint mit den Methoden aus [15] möglich, würde aber in diesem Rahmen zu umfangreich ausfallen.

(3) Beschränkung auf sog. "kleine H-Flächen" mit $\|f\|_\infty \cdot |H| = \sup_{x\in B} |f(x)| \cdot |H| < \frac{1}{2}$. Obwohl bei unserem Zugang nicht notwendig erforderlich, erweist sich eine solche Bedingung als geeignet, die eindeutige lokale Lösbarkeit des Dirichlet-Problems zu sichern.

Die Regularitätsforderungen (1) sind im wesentlichen verträglich mit den Ergebnissen der Regularitätstheorie

in [26], [22], [24] für Lösungen des Plateau-Problems. Denn nach den Einbettungssätzen von Sobolev impliziert $\alpha \in H^{s+2-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R}^3)$, $s \geq 2$, auch $\alpha \in C^{s,\nu}(\partial B, \mathbb{R}^3)$, $0 < \nu < 1$, was nach dem Hauptsatz in [24] $f \in C^{s,\nu}(\bar{B}, \mathbb{R}^3)$ und damit $f \in H^s(B, \mathbb{R}^3)$ zur Folge hat. Da die Nichtlinearität der H-Flächen-Gleichung "quadratisches Wachstum im Gradienten" aufweist, könnten im allgemeinen Fall - ohne Konformitätsbedingung - Schwierigkeiten bei der Regularität entstehen. Für unsere Untersuchungen genügen aber lokale Betrachtungen in Umgebung einer gegebenen regulären H-Fläche, deren Existenz als Lösung des Plateau-Problems etwa unter der Voraussetzung $\|\alpha\|_\infty \cdot |H| \leq 1$ gesichert ist. [28]. Alle benötigten Abschätzungen ergeben sich daraus.

Zweck dieser Einschränkungen ist es, eine möglichst einfache differenzierbare Struktur auf den H-Flächen zu erzeugen, die weitgehend mit Hilfe der Randdaten analysiert werden kann.

Bei unserem weiteren Vorgehen erweist es sich oft als vorteilhaft, nicht in reellen kartesischen Koordinaten, sondern in komplexen oder Polar-Koordinaten zu rechnen. Für $(x,y) \in \bar{B}$ setze $z := x+iy \in \mathbb{C}$ und für $f \in C^2(B, \mathbb{R}^3)$

$$f(x,y) = \hat{f}(z)$$

Durch Einführen von

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

erhält man die Umrechnungsformeln:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_z &= \tfrac{1}{2}(f_x - i f_y) \\ \tilde{f}_{\bar{z}} &= \tfrac{1}{2}(f_x + i f_y) \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} f_x &= \tilde{f}_z + \tilde{f}_{\bar{z}} \\ f_y &= i(\tilde{f}_z - \tilde{f}_{\bar{z}}) \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Um auch die Gleichungen (1.1.1) und (1.1.2) komplex schreiben zu können, muß man die Produkte "·" und "∧" geeignet, d.h. bilinear (!), ins Komplexe fortsetzen.

Sei $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^3$, dann:

$$\begin{aligned} a \cdot b &:= \sum_{j=1}^{3} a_j b_j \\ a \wedge b &:= \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

Dabei bleibt die Antisymmetrie von "∧" erhalten; "·" ist jedoch nicht mehr definit, d.h. es gibt $a \in \mathbb{C}^3$, $a \neq 0$ mit $a \cdot a = 0$.

Bildet man aus $a,b,c \in \mathbb{C}^3$ das Spatprodukt $(a \wedge b) \cdot c$, so ist dieses wie im Reellen invariant unter zyklischen Vertauschungen von a,b,c.

Wie man leicht nachrechnet, gilt:

$$\Delta f = 2H\, f_x \wedge f_y \Leftrightarrow \tilde{f}_{z\bar{z}} = iH\, \tilde{f}_{\bar{z}} \wedge \tilde{f}_z \tag{1.1.5}$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{f}_z \cdot \tilde{f}_z &= \tfrac{1}{4}(f_x \cdot f_x - f_y \cdot f_y - 2i\, f_x \cdot f_y) = 0 \\ &\Leftrightarrow f_x \cdot f_x = f_y \cdot f_y,\ f_x \cdot f_y = 0 \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

Setzt man andererseits für $(x,y) \in \overline{B}$, $(x,y) \neq 0$

$$\begin{aligned} x &= r \cos \phi \\ y &= r \sin \phi \end{aligned} \qquad \text{mit } r \in \mathbb{R}_+ , \ \phi \in [0,2\pi[$$

und $f(x,y) = \tilde{\tilde{f}}(r,\phi)$, so ist

$$\begin{aligned} f_x &= \tilde{\tilde{f}}_r \cos \phi - \tilde{\tilde{f}}_\phi \frac{\sin \phi}{r} \\ f_y &= \tilde{\tilde{f}}_r \sin \phi + \tilde{\tilde{f}}_\phi \frac{\cos \phi}{r} \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

bzw.

$$\begin{aligned} 2z f_z &= r\tilde{\tilde{f}}_r - i\tilde{\tilde{f}}_\phi \\ 2\bar{z} f_{\bar{z}} &= r\tilde{\tilde{f}}_r + i\tilde{\tilde{f}}_\phi \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

Im weiteren werden wir auf eine strikte Unterscheidung von $f, \tilde{f}, \tilde{\tilde{f}}$ verzichten, solange sich die Wahl der Koordinaten aus dem Kontext ergibt und bei Umrechnungen die Formeln (1.1.3), (1.1.7) und (1.1.8) beachtet werden.

Die folgende Beobachtung ist grundlegend für unsere Betrachtungen:

1.3. Lemma:

Sei $f \in C^2(\overline{B}, \mathbb{R}^3)$ eine H-Extremale. Dann ist die Abbildung

$$f_z \cdot f_z : \overline{B} \to \mathbb{C} \quad \text{holomorph.}$$

Beweis:

Falls $f \in C^2(\overline{B}, \mathbb{R}^3)$ ist $f_z \cdot f_z$ stetig partiell differenzierbar und stetig fortsetzbar auf den Rand ∂B. In B gilt:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} (f_z \cdot f_z) = 2f_{\bar{z}z} \cdot f_z = 2iH(f_{\bar{z}} \wedge f_z) \cdot f_z =$$

$$= 2iH(f_z \wedge f_z) \cdot f_{\bar{z}} = 0$$

wegen der Antisymmetrie von "$\wedge$". □

Damit genügt es, die Konformitätsrelation für eine H-Extremale nur auf dem Rand nachzuprüfen.

1.4. Lemma:

Sei $f \in C^2(\bar{B}, \mathbb{R}^3)$ eine H-Extremale. Dann sind äquivalent:

(i) f konform parametrisiert,
d.h. $f_x \cdot f_x = f_y \cdot f_y$, $f_x \cdot f_y = 0$ auf B

(ii) $f_z \cdot f_z = 0$ auf ∂B, bzw. B

(iii) $f_r \cdot f_\phi = 0$ auf ∂B

Beweis:

(i) $\Leftrightarrow$ (ii) ist nach (1.1.6) evident.

Mit (1.1.8) folgt (ii) $\Leftrightarrow$ (iii), denn:

$$4z^2 f_z \cdot f_z = (rf_r - if_\phi) \cdot (rf_r - if_\phi)$$

$$= r^2 f_r \cdot f_r - f_\phi \cdot f_\phi - 2irf_r \cdot f_\phi$$

Da auch $4z^2 f_z \cdot f_z$ holomorph in B ist und f_r, f_ϕ reelle Werte besitzen, sind $r^2 f_r f_r - f_\phi \cdot f_\phi$ und $-2irf_r f_\phi$ zueinander konjugiert harmonisch.

Aus (iii) folgt daher $4z^2 f_z \cdot f_z = \text{const.}$, was nur den Wert 0 haben kann. □

1.5. Bemerkung:

Wie man mit den bereitgestellten Formeln leicht nachrechnet, ist sowohl die Differentialgleichung (1.1.1) wie auch die Konformitätsbedingung (1.1.2) invariant gegen konforme Abbildungen, d.h. ist ϕ eine konforme Abbildung des Einheitskreises B auf sich, $f \in C^2(\bar{B}, \mathbb{R}^3)$, $g := f \circ \phi$, so gilt:

$$\Delta f = 2Hf_x \wedge f_y \Leftrightarrow \Delta g = 2Hg_x \wedge g_y$$

bzw.

$$f_z \cdot f_z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad g_z \cdot g_z = 0$$

1.2 Die Menge der H-Extremalen

Wir möchten in diesem Abschnitt die Menge der H-Extremalen untersuchen, d.h. die Lösungen der H-Flächen-Gleichung, ohne Konformität zu fordern. Im Fall H=0 erhalten wir die harmonischen Abbildungen, die wegen der Linearität der Gleichung einen Vektorraum bilden. Außerdem wissen wir, daß vorgegebene Randwerte genau eine Lösung der Gleichung bestimmen. Im nichtlinearen Fall $H \neq 0$ zeigt sich, daß wir die eindeutige Lösbarkeit des Dirichlet-Problems für die H-Flächen-Gleichung nicht erwarten dürfen. Beispielsweise kann man die Kugelschalen vom Radius $R > 0$ als "große" und "kleine" H-Extremalen $(H = \frac{1}{R})$ für Randwerte deuten, die eine beliebige, nicht äquatoriale Kreislinie beschreiben (siehe [21]). Wir können jedoch, etwa durch eine Bedingung der Form $\|f\|_\infty \cdot |H| < c$ mit $0 < c < 1$ eine einzige, die sog. "kleine", Lösung auswählen.

1.6. Definition:

Sei $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 3$, $H \in \mathbb{R}$, $H \neq 0$.

$$\mathcal{H} := \{f \in H^s(B,\mathbb{R}^3) : \Delta f = 2Hf_x \wedge f_y \text{ und } \|f\|_\infty \cdot |H| < \frac{1}{2}\}$$

Es zeigt sich, daß $\mathcal{H}$ die Struktur einer Hilbertmannigfaltigkeit besitzt. Damit meinen wir, daß diese Menge lokal diffeomorph zu einem Hilbertraum ist. Wir halten uns bei den Begriffsbildungen zu unendlichdimensionalen Mannigfaltigkeiten an die Vorlage von Abraham und Robbin [2]. In diesem Rahmen bedeutet Differenzieren immer Differenzieren im Sinne von Fréchet (bez. der Hilbertraum-Normen), wofür wir als Zeichen "D" verwenden. Mit "Untermannigfaltigkeit" bezeichnen wir - analog dem endlichdimensionalen Fall - Mengen, die lokal diffeomorph so abgebildet werden können, daß sie als offene Teilmengen eines abgeschlossenen linearen Unterraums des umgebenden Raumes erscheinen. Wir ziehen hier die speziellere Hilbertraum-Theorie der allgemeineren Formulierung in Banachräumen vor, weil wir damit Schwierigkeiten vermeiden, wie sie in Zusammenhang mit "Untermannigfaltigkeiten" bei der Bildung von Komplementräumen entstehen. Den Tangentialraum T_fM an eine eingebettete Mannigfaltigkeit M im Punkt f können wir uns vorstellen als den Hilbertraum, der durch das Bild des Differentials einer Kartenabbildung (in f), eines stetigen linearen Operators, gebildet wird. (Im Unendlichdimensionalen muß man besonderen Wert legen auf die Abgeschlossenheit dieses linearen Raums in der richtigen Topologie.)

1.7. Satz:

Die Menge $\mathcal{H}$ ist eine C^2-Untermannigfaltigkeit von $H^s(B,\mathbb{R}^3)$, lokal parametrisiert über den Randwerten aus $H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R}^3)$. Ist $f \in \mathcal{H}$, so gilt

$$h \in T_f\mathcal{H} \Leftrightarrow h \in H^s(B,\mathbb{R}^3) \text{ und } \Delta h = 2H(f_x \wedge h_y + h_x \wedge f_y).$$

Der Beweis von Satz 1.7. ergibt sich aus der Untersuchung des Dirichlet-Problems für die linearisierte H-Flächengleichung.

Wir beginnen mit einem Integralsatz:

1.8. Lemma:

Seien $f,g,h \in H^s(B,\mathbb{R}^3)$, $s \geq 2$.

Dann ist

$$\int_B g_x \cdot h_x + g_y \cdot h_y + 2Hf \cdot (g_x \wedge h_y + h_x \wedge g_y)\, d\lambda =$$

$$= \int_B \{-\Delta g + 2H(g_x \wedge f_y + f_x \wedge g_y)\} \cdot h\, d\lambda + \qquad (1.2.1)$$

$$+ \oint_{\partial B} \{g_r + 2H\, g_\varphi \wedge f\} \cdot h\, ds$$

Beweis:

Parametrisiert man den Rand von B durch $\varphi \to \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$, so hat auch die äußere Normale an ∂B die Form $\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}$.

Wir wählen zunächst $f,g,h \in C^\infty(\overline{B},\mathbb{R}^3)$.

$$\int_B g_x \cdot h_x + g_y \cdot h_y + 2Hf \cdot (g_x \wedge h_y + h_x \wedge g_y)\, d\lambda =$$

$$= \int_B g_x \cdot h_x + g_y \cdot h_y + 2Hh_y \cdot (f \wedge g_x) + 2Hh_x \cdot (g_y \wedge f)\, d\lambda =$$

$$= \int_B -\Delta g \cdot h \, d\lambda + \oint_{\partial B} (g_x \cos\phi + g_y \sin\phi) \cdot h \, ds +$$

$$+ \int_B -2H(f_y \wedge g_x + f \wedge g_{xy}) \cdot h \, d\lambda + \oint_{\partial B} 2H(f \wedge g_x) \cdot h \sin\phi \, ds$$

$$+ \int_B -2H(g_{yx} \wedge f + g_y \wedge f_x) \cdot h \, d\lambda + \oint_{\partial B} 2H(g_y \wedge f) \cdot h \cos\phi \, ds$$

$$= \int_B \{-\Delta g + 2H(g_x \wedge f_y + f_x \wedge g_y)\} \cdot h \, d\lambda +$$

$$+ \oint_{\partial B} (g_r + 2H \, g_\phi \wedge f) \cdot h \, ds . \qquad \text{(siehe (1.1.7))}$$

Die Integrale sind also für glatte Funktionen gleich. Approximiert man bel. Abbildungen $f,g,h \in H^s(B,\mathbb{R}^3)$ durch glatte, so impliziert diese H^s-Konvergenz eine L^1-Konvergenz der Integrale und damit ihre Gleichheit auch in diesem Fall. □

1.9. Lemma:

Sei $f \in \mathcal{H}$. Dann gibt es zu jedem $(\psi_1,\psi_2) \in H^{s-2}(B,\mathbb{R}^3) \times H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R}^3)$ genau ein $h \in H^s(B,\mathbb{R}^3)$ mit

$$\begin{aligned} \Delta h - 2H(h_x \wedge f_y + f_x \wedge h_y) &= \psi_1 \quad \text{auf} \quad B \\ h/_{\partial B} &= \psi_2 \quad \text{auf} \quad \partial B \end{aligned} \qquad (1.2.2)$$

Beweis:

Wir definieren den stetigen linearen Operator

$$A : H^s(B,\mathbb{R}^3) \to H^{s-2}(B,\mathbb{R}^3) \times H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R}^3)$$

$$Ah := (\Delta h, \, h/_{\partial B}).$$

Durch Zurückführen auf den eindimensionalen Laplace-Operator ist leicht zu erkennen, daß auf den gewählten

Räumen A ein Fredholm-Operator vom Index 0 ist; d.h. der Kern Ker A ist endlichdimensional, das Bild Im A ist abgeschlossen und hat endliche Kodimension.
ind A := dim Ker A - codim Im A. ([37] Ch.II, 5.2.)
In diesem Fall ist sogar dim Ker A = 0.
Weiter definieren wir:

$$C : H^s(B,\mathbb{R}^3) \to H^{s-2}(B,\mathbb{R}^3) \times H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R}^3)$$

$$Ch := (-2H(h_x \wedge f_y + f_x \wedge h_y), 0)$$

C ist ein kompakter linearer Operator, denn:
Da $s \geq 3$, ist $h_x, f_x, h_y, f_y \in H^{s-1}(B,\mathbb{R}^3)$ mit $s-1 \geq 2$.
Die Sobolev-Räume der Ordnungen ≥ 2 bilden aber sogar eine Algebra ([3], Th. 5.23.), so daß
$h_x \wedge f_y + f_y \wedge h_x \in H^{s-1}(B,\mathbb{R}^3)$, was natürlich kompakt eingebettet in $H^{s-2}(B,\mathbb{R}^3)$ liegt. Demzufolge ist A+C als kompakte Störung eines Fredholmoperators wieder Fredholmsch und

$$\text{ind}(A+C) = \text{ind } A = 0. \quad ([33] \text{Ch. IV, Th. 5.26})$$

Um die Bijektivität von A+C zu zeigen, genügt es daher, die Injektivität nachzuweisen.

Sei also $h \in H^s(B,\mathbb{R}^3)$ mit $(A+C)h = (0,0)$

$$\Rightarrow \quad \Delta h - 2H(f_x \wedge h_y + h_x \wedge f_y) = 0$$

$$h/_{\partial B} = 0$$

Es ist dann

$$0 = \int_B \{-\Delta h + 2H(h_x \wedge f_y + f_x \wedge h_y)\} \cdot h \, d\lambda$$

$$= \int_B h_x \cdot h_x + h_y \cdot h_y + 4Hf \cdot (h_x \wedge h_y)\, d\lambda \text{ wegen (1.2.1)}$$

$$\geq \int_B (h_x \cdot h_x + h_y \cdot h_y)(1 - 2|H||f|)\, d\lambda$$

$$\geq (1 - 2\|f\|_\infty \cdot H) \int_B h_x^2 + h_y^2\, d\lambda \geq 0 \quad \text{da } \|f\|_\infty \cdot |H| < \frac{1}{2}$$

Wegen $h/_{\partial B} = 0$ folgt aus $\int h_x^2 + h_y^2\, d\lambda = 0$ sofort $h \equiv 0$ fast überall auf B.

Das war zu zeigen. □

1.10. Bemerkung:

(1) Die Bedingung $\|f\|_\infty \cdot |H| < \frac{1}{2}$ dient lediglich dazu, die eindeutige Lösbarkeit von System (1.2.2) auf möglichst einfache Weise zu sichern. Zwar weiß man aus Arbeiten von Jäger und Kaul ([32],[34]), daß das nichtlineare Dirichlet-Problem im Bereich $\|f\|_\infty \cdot |H| < 1$ eindeutig lösbar ist, doch impliziert das bekanntlich noch nicht die Eindeutigkeit des linearisierten Problems. Durch Übertragen der Methoden aus [32],[34] kann man dies jedoch erreichen. Die notwendigen Rechnungen würden aber einige Seiten füllen, so daß wir uns an dieser Stelle mit den "schlechteren" Integralabschätzungen begnügen.

(2) Zu diesem Zweck wären auch Integralabschätzungen geeignet, wie sie Wente und Steffen vornehmen ([54] Ch. III, [45] Satz 1.3.). Wir verweisen auf die Diskussion in der Einführung von [54].

1.11. Lemma:

Sei $f_o \in \mathcal{K}$, $f_{o/\partial B} = \psi_o$.

Dann gibt es eine $H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R}^3)$-Umgebung U von ψ_o, eine $H^s(B, \mathbb{R}^3)$-Umgebung V von f_o und eine C^2-Abb. $\xi : U \to V$, so daß gilt:

$$f \in V \cap \mathcal{K},\ f_{/\partial B} = \psi \in U \iff f = \xi(\psi)$$

Beweis:

Wir benützen den "impliziten-Funktionen-Satz" im Hilbertraum ([36], I.5).

Definiere die Abbildung

$$L : H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R}^3) \times H^s(B, \mathbb{R}^3) \to H^{s-2}(B, \mathbb{R}^3) \times H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R}^3)$$

$$L(\psi, f) := (\Delta f - 2Hf_x \wedge f_y, f_{/\partial B} - \psi)$$

Es ist $L(\psi_o, f_o) = (0, 0)$.

L ist auf den angegebenen Räumen für $s \geq 3$ differenzierbar (sogar C^∞), da der lineare wie auch der bilineare Anteil beschränkt sind ([8], 2.1.22). Mit D_2 bezeichnen wir die Differentiation "nach der zweiten Variablen f".

$$D_2 L(\psi_o, f_o) : H^s(B, \mathbb{R}^3) \to H^{s-2}(B, \mathbb{R}^3) \times H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R}^3),$$

$$D_2 L(\psi_o, f_o) \langle h \rangle := (\Delta h - 2H(f_{ox} \wedge h_y + h_x \wedge f_{oy}),\ h_{/\partial B})$$

$D_2 L(\psi_o, f_o)$ ist ein Isomorphismus, wenn für alle $(\psi_1, \psi_2) \in H^{s-2}(B, \mathbb{R}^3) \times H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R}^3)$ genau ein $h \in H^s(B, \mathbb{R}^3)$ existiert mit

$$D_2 L(\psi_o, f_o) \langle h \rangle = (\psi_1, \psi_2).$$

Dies ist aber gerade die Aussage von Lemma 1.9. .

Somit gibt es Umgebungen $U \subset H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R}^3)$ von ψ_0 und $V \subset H^s(B, \mathbb{R}^3)$ von f_0 und eine Abbildung $\theta : U \to V$ mit

$$L(\psi, \theta(\psi)) = (0,0) \quad \forall\, \psi \in U$$

Man kann U,V so klein wählen, daß θ dieselben Differenzierbarkeitseigenschaften wie L hat und außerdem gilt:

$$\psi \in U \text{ und } f \in V \cap \mathcal{H} \text{ mit } L(\psi, f) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = \theta(\psi)$$

□

1.12. Korollar:

Sei $\theta : U \to V$ wie eben, $f \in \mathcal{H} \cap V$, $\psi \in U$ mit $f = \theta(\psi)$. Sei weiterhin $\tilde{\psi} \in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R}^3)$ und $h \in H^s(B, \mathbb{R}^3)$ mit $h = D\theta(\psi) < \tilde{\psi} >$;
dann erfüllt h das partielle Differentialgleichungssystem

$$\Delta h - 2H(h_x \wedge f_y + f_x \wedge h_y) = 0 \quad \text{auf} \quad B$$

$$h/_{\partial B} = \tilde{\psi} \quad \text{auf} \quad \partial B$$

Beweis:

Es ist für alle $\psi \in U$:

$$L(\psi, \theta(\psi)) = (0,0)$$

$$\Rightarrow \quad D_1 L(\psi, \theta(\psi)) < \tilde{\psi} > + D_2 L(\psi, \theta(\psi)) < D\theta(\psi) < \tilde{\psi} > > = (0,0)$$

mit $h := D\theta(\psi) < \tilde{\psi} >$ ergibt sich:

$$(0, -\tilde{\psi}) + (\Delta h - 2H(f_x \wedge h_y + h_x \wedge f_y),\ h/_{\partial B}) = (0,0)$$

also die Beh. □

1.13. Definition:

Sei $f \in \mathcal{H}$.

Wir bezeichnen die Abbildung Θ, die nach Lemma 1.11. in Umgebung der Randwerte $f_{/\partial B}$ existiert, als den lokalen Fortsetzungsoperator.

Mit dessen Hilfe kommen wir zum

Beweis von Satz 1.7.

Es sei $f_o \in \mathcal{H}$, $f_{o/\partial B} = \psi_o$ und $\Theta : U(\psi_o) \to V(f_o)$ wie in Lemma 1.11.

Sei $W \subset H^s(B,\mathbb{R}^3)$ eine Umgebung von f_o, so daß für alle $f \in W$: $f_{/\partial B} \in U(\psi_o)$.

Wir werden zeigen, daß man jedes $f \in W$ eindeutig zerlegen kann in f_1+f_2, wobei $f_1 \in \mathcal{H}$ mit $f_{/\partial B} = f_{1/\partial B}$ und $f_2 \in \overset{\circ}{H}{}^s(B,\mathbb{R}^3)$, d.h. $f_2 \in H^s(B,\mathbb{R}^3)$ mit Randwerten = 0.

Dazu definieren wir:

$$P : W \to H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R}^3) \times \overset{\circ}{H}{}^s(B,\mathbb{R}^3)$$

$$P(f) := (f_{/\partial B}, f-\Theta(f_{/\partial B}))$$

P ist C^2 und für $h \in H^s(B,\mathbb{R}^3)$ ist

$$DP(f_o)\langle h\rangle = (h_{/\partial B}, h-D\Theta(\psi_o)\langle h_{/\partial B}\rangle)$$

Man überzeugt sich mit Hilfe von Korollar 1.12. leicht davon, daß $DP(f_o)$ ein Isomorphismus ist.

Denn: $DP(f_o)\langle h\rangle = (0,0) \Rightarrow h=0$

und mit $h := D\Theta(\psi_o)\langle g_1\rangle + g_2$ ist

$$DP(f_o)\langle h\rangle = (g_1,g_2),\ g_1 \in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R}^3)$$

$$g_2 \in \overset{\circ}{H}{}^s(B,\mathbb{R}^3).$$

Demnach ist P ein lokaler Diffeomorphismus mit der Eigenschaft

$$\forall\, f \in W : P(f) = ({}^{f}/_{\partial B}, 0) \Leftrightarrow f \equiv \Theta({}^{f}/_{\partial B}),$$

Was die lokale Formulierung der Aussage von Satz 1.7. darstellt. □

1.3 Einbeziehung der Plateau-Randbedingungen

Wir werden nun aus der Mannigfaltigkeit $\mathcal{H}$ diejenigen H-Extremalen aussondern, deren Randwerte Umparametrisierungen einer bestimmten Einbettung $\alpha : \partial B \to \mathbb{R}^3$ darstellen. Wie bereits erwähnt, wollen wir nur diffeomorphe Umparametrisierungen zulassen.

1.14. Definition:

Sei $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 3$.

$\mathcal{D} := \{u \in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B, \partial B) \mid u$ Diffeomorphismus$\}$

d.h. u injektiv und $|u'| \neq 0$

$\mathcal{O}\!\mathcal{l} := \{\alpha \in H^{s+2-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R}^3) \mid \alpha$ injektiv, $|\alpha'| \neq 0\}$

und für $\alpha \in \mathcal{O}\!\mathcal{l}$: $\eta(\alpha) = \{f \in \mathcal{H} \mid \exists u \in \mathcal{D}$ mit ${}^{f}/_{\partial B} = \alpha \circ u\}$

$$\eta := \bigcup_{\alpha \in \mathcal{O}\!\mathcal{l}} (\alpha, \eta(\alpha))$$

Diese Bezeichnungen sind weitgehend analog denen in [15] gewählt. Zunächst sind $\mathcal{O}\!\mathcal{l}$ und $\mathcal{D}$ offene Mengen in der entsprechenden Topologie. $\mathcal{D}$ ist aber auch eine topologische Gruppe. Randwerte von der Form $\alpha \circ u$, $\alpha \in \mathcal{O}\!\mathcal{l}$, $u \in \mathcal{D}$, kann man als Bahnen von α unter der Gruppe $\mathcal{D}$

der Diffeomorphismen von ∂B ansehen. Diese Art, die Plateau-Randbedingungen zu formulieren, hat Tromba in [52] eingeführt. Dort hat er aber auch dargelegt, daß diese Gruppenaktion i.a. nicht differenzierbar ist (vgl. [52], § VII). Mann kann Differenzierbarkeit nur erreichen, indem man den Kurven $\alpha \in \mathcal{A}$ - wie in Definition 1.13. geschehen - einen "Regularitätsüberschuß" gibt und sich so auf eine dichte Teilmenge von α's zurückzieht. Der tiefere Grund dafür liegt in dem sog. "Omega-Lemma", das nach Ebin und Marsden ([16], p. 108) in unserem Fall besagt:

1.15. Lemma:

Sei $r,s \in \mathbb{N}$, $\alpha \in H^{s+r-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R}^3)$; dann ist

$$\mathcal{D} \to H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R}^3)$$
$$u \mapsto \alpha \circ u$$

eine C^r-Abbildung.

Beweis:

Der Beweis mit Hilfe der Taylorentwicklung ([2], § 2.1) geht auf Abraham [1] zurück. Für den H^s-Fall, $s \in \mathbb{R}$, ist zu beachten, daß man die Komposition $\alpha \circ u$ nur mit Abbildungen u vornehmen darf, für die man bei den Integralabschätzungen den Transformationssatz anwenden kann, also etwa für Diffeomorphismen. □

Während $\eta(\alpha)$ die H-Extremalen zu einer festen Randkurve α beschreibt, wird mit η der Versuch gemacht, auch die Gesamtheit der verschiedenen Randkurven zu erfassen.

$\eta(\alpha)$ und η tragen natürliche Mannigfaltigkeits- und Bündel-Strukturen, was im folgenden zu zeigen ist.

1.16. Bemerkung:

Für die Struktur von $\eta(\alpha)$, bzw. η ist es unerheblich, ob wir die Injektivität von α fordern, d.h., ob wir als Randkurven Einbettungen oder Immersionen zulassen, solange $\eta(\alpha) \neq \emptyset$ klar ist. Dies folgert man am leichtesten aus den klassischen Existenzsätzen, die sich eben auf Einbettungen α beziehen. Erst in den Anwendungen in Kap. IV werden wir diese Bedingung fallenlassen.

1.17. Lemma:

Sei $\alpha \in H^{s+2-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R}^3)$ mit $|\alpha'| \neq 0$, (α eine Immersion); dann gibt es ein begleitendes Dreibein von Abbildungen $t_j \in H^{s+1-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R}^3)$, $j=1,2,3$, mit:

$$\text{(i)} \quad t_1 = {}^{\alpha'}/_{|\alpha'|} \qquad (1.3.1)$$

$$\text{(ii)} \quad t_j \cdot t_k = \delta_{jk} \quad j,k = 1,2,3$$

Man kann die t_j so wählen, daß sie differenzierbar von α abhängen.

Beweis:

Der Existenzbeweis in der $C^{s,\nu}$-Regularität wird bei [14], Lemma 2.2., geführt. Die H^s-Regularität folgt aus einem lokalen Impliziten-Funktionen-Argument. □

1.18. Lemma:

Sei $\alpha \in H^{s+2-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R}^3)$, $|\alpha'| \neq 0$ und $\eta(\alpha) \neq \emptyset$.

Dann ist $\eta(\alpha)$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{H}$ bzw. $H^s(B,\mathbb{R}^3)$.

Falls $f \in \eta(\alpha)$, ${}^{f}/_{\partial B} = \alpha \circ u$, dann gilt:

$$h \in T_f\eta(\alpha) \Leftrightarrow h \in T_f\mathcal{H} \text{ und } \exists \tilde{h} \in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R}) \text{ mit } {}^{h}/_{\partial B} = \alpha' \circ u\tilde{h} \tag{1.3.2}$$

Beweis:

Sei $f \in \eta(\alpha)$ mit ${}^{f}/_{\partial B} = \alpha \circ u$.
In Umgebung von f bildet der Fortsetzungsoperator θ als Diffeomorphismus Untermannigfaltigkeiten der Randwerte auf Untermannigfaltigkeiten von $\mathcal{H}$ ab. Es genügt also, die Randwerte zu betrachten.

Wir definieren die Abbildung Φ als Einbettung in das Normalenbündel von α.

$$\Phi : \mathcal{D} \times H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R}) \times H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R}) \to H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R})$$

$$\Phi(u,v_2,v_3) := \alpha \circ u + t_2 \circ uv_2 + t_3 \circ uv_3 ,$$

wo $t_j, j=1,2,3$ das zu α gehörende Dreibein darstellt. Da $t_{2,3} \in H^{s+1-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R}^3)$, ist Φ wegen des Omega-Lemmas 1.15. nur C^1.

Es ist $D\Phi(u,0,0)\langle \hat{u},\hat{v}_2,\hat{v}_3 \rangle = \alpha' \circ u\hat{u} + t_2 \circ u\hat{v}_2 + t_3 \circ u\hat{v}_3$ *)
und damit ein Isomorphismus von

$$(H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R}))^3 \to H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R}^3)$$

Damit ist Φ ein lokaler Diffeomorphismus, dessen Einschränkung auf $\mathcal{D} \times \{0\} \times \{0\}$ gerade die Randwerte von $\eta(\alpha)$ parametrisiert. Daraus folgen alle Aussagen. □

---

*) zur Berechnung der Ableitung von $\alpha \circ u$ nach u siehe [14], Bew. Lemma 2.3

1.19. Satz:

(i) η ist eine C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{O}\!\ell \times \mathcal{H}$ bzw. $\mathcal{O}\!\ell \times H^s(B,\mathbb{R}^3)$, lokal parametrisiert über $\mathcal{O}\!\ell \times \mathcal{D}$

(ii) η ist ein Bündel über $\mathcal{O}\!\ell$ mit Projektion $\pi : \eta \to \mathcal{O}\!\ell$, $\pi(\alpha,f) := \alpha$ und Fasern $\pi^{-1}(\alpha) = \eta(\alpha)$

(iii) Ist $(\alpha,f) \in \eta$, $f/_{\partial B} = \alpha \circ u$, dann:

$$(\gamma,h) \in T_{(\alpha,f)}\eta \Leftrightarrow \gamma \in H^{s+2-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R}^3),\ h \in \mathcal{H} \text{ mit:}$$

$$\exists \tilde{h} \in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R}) : h/_{\partial B} = \alpha' \circ u\tilde{h} + \gamma \circ u$$

Beweis:

Wir können wie im Beweis zu 1.18. vorgehen und eine Abbildung ϕ definieren, die jetzt noch von α abhängen darf.

$$\phi : \mathcal{O}\!\ell \times \mathcal{D} \times H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R}) \times H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R}) \to H^{s+2-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R}^3) \times H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R}^3) \times H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R}^3)$$

$$\phi(\alpha,u,v_2,v_3) := (\alpha,\alpha \circ u + t_2 \circ uv_2 + t_3 \circ uv_3)$$

und $D\phi(\alpha,u,0,0)\langle \gamma,\tilde{u},\tilde{v}_2,\tilde{v}_3\rangle = (\gamma,\gamma \circ u + \alpha' \circ u\tilde{u} + t_2 \circ u\tilde{v}_2 + t_3 \circ u\tilde{v}_3)$

Injektivität und Surjektivität der Ableitung folgen wegen der Kopplung der Komponenten durch γ. Damit liefert ϕ wieder den gewünschten lokalen Diffeomorphismus. Außerdem erkennt man, daß die Einschränkung von ϕ auf $\mathcal{O}\!\ell \times \mathcal{D}$ als lokale Trivialisierung von η gelten kann, was die Bündeleigenschaft (ii) beweist. Die Zerlegung des Tangentialraums ist offensichtlich. □

Ist $(\gamma,h) \in T_{(\alpha,f)}\eta$, so nennen wir den Anteil mit Randwerten $\alpha' \circ u\tilde{h}$, $\tilde{h} \in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R})$ die vertikale Komponente, den Anteil mit Randwerten $\gamma \circ u$ (nicht ganz zutreffend) die horizontale Komponente des Tangentialvektors.

D.h. $(\gamma,h) = (\gamma,h_1) + (0,h_2)$

$$\text{mit } h \in T_f\mathcal{H},\ h_1{}_{/\partial B} = \gamma \circ u \qquad (1.3.3)$$
$$h_2{}_{/\partial B} = \alpha' \circ u\tilde{h}$$

Dies liefert eine direkte Zerlegung in Teilräume, die zu $T_\alpha\mathcal{A} \cong H^{s+2-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R}^3)$ bzw. $T_f\eta(\alpha) \cong H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R})$ isomorph sind.

Wir können statt der Bündelprojektion π auch die Projektion auf die 2. Komponente von η betrachten.

$$\pi_2 : \eta \to \mathcal{H} \qquad (1.3.4.)$$
$$\pi_2(\alpha,f) := f$$

Diese Abbildung wird uns später dazu dienen, Unterstrukturen von $\mathcal{H}$ auf das Bündel η "zurückzuholen". Dazu benötigen wir eine Eigenschaft des Differentials von π_2 an der Stelle $(\alpha,f) \in \eta$, d.h. des induzierten linearen Operators

$\pi_{2,*}(\alpha,f) : T_{(\alpha,f)}\eta \to T_f\mathcal{H}$, nämlich:

1.20. Lemma:

Ist $(\alpha,f) \in \eta$, so ist das Bild von $\pi_{2,*}(\alpha,f)$ dicht in $T_f\mathcal{H}$.

Beweis:

π_2 ist die Einschränkung der linearen Projektion auf η; es gilt also für $(\gamma,h) \in T_{(\alpha,f)}\eta$

$$\pi_{2,*}(\alpha,f)\cdot(\gamma,h) = h$$

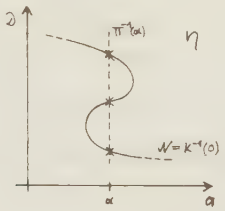
Es genügt zu zeigen, daß die Randwerte, wie sie in η vorkommen, dicht liegen in den Randwerten von $T_f\mathcal{H} = H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R}^3)$.

Sei $f/_{\partial B} = \alpha \circ u$ und $\omega \in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R}^3)$. Da $u' \neq 0$, ist $u^{-1} \in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B,\partial B)$ und $\omega \circ u^{-1} \in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R}^3)$. $H^{s+2-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R}^3)$ ist dicht in $H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R}^3)$; somit kann man $\omega \circ u^{-1}$ durch ein $\gamma \in H^{s+2-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R}^3)$ approximieren.

Aus Stetigkeitsgründen approximiert dann $\gamma \circ u$ gerade ω in der $H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R}^3)$-Norm. $(\gamma, D\theta(\alpha \circ u) < \gamma \circ u >)$ liegt aber in $T_{(\alpha,f)}\eta$. (vgl. [15] Lemma 2.8.) □

Kap. II Ein Ansatz zur globalen Betrachtung des Plateau-Problems

Wir sind nun in der Lage, die Menge der H-Flächen in η zu bestimmen. Diese Menge stellen wir dar als das Nullstellengebilde einer Abbildung K auf η, die durch die Eigenschaft der konformen Parametrisierung gegeben wird.



Schränken wir die Bündelprojektion π von η auf die Nullstellenmenge $N = K^{-1}(0)$ von K ein, so liefert uns das Urbild einer Randkurve α genau die Lösungen des Plateau-Problems zu α in η. Es liegt zunächst die Vermutung nahe, daß $N \subset \eta$ eine Untermannigfaltigkeit darstellt. In diesem Kapitel werden wir durch Untersuchung des Differentials K_* von K feststellen, daß man eine Mannigfaltigkeitsstruktur im allgemeinen nicht erwarten kann, weil das Ko-Bild von K_* nicht stabil ist.

2.1 Der Konformitätsoperator

2.1. Definition:

Sei $s \in \mathbb{N}$, $s \geq 5$. Wir definieren den Konformitätsoperator

$$K : \eta \to H^{s-1-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R}^3)$$

durch $K(\alpha,f) := \frac{\partial}{\partial r} f/_{\partial B} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} f/_{\partial B}$

2.2. Satz:

K ist eine C^1-Abbildung mit der Eigenschaft:

$$K(\alpha,f) \equiv 0 \iff f \in \eta(\alpha) \text{ ist H-Fläche in } \eta.$$

Beweis:

K ist auf $\mathcal{O} \times \mathcal{H}$ eine beschränkte quadratische Abbildung und damit C^∞. Durch Einschränkung auf die C^1-Mannigfaltigkeit η wird K nur einmal stetig differenzierbar. Die Eigenschaft, daß die Nullstellen von K genau die H-Flächen in η charakterisieren, liefert uns Lemma 1.4. □

2.3. Zusatz:

Ist $(\alpha,f) \in \eta, f/_{\partial B} = \alpha \circ u$, so gilt für alle $(\gamma,h) \in T_{(\alpha,f)}\eta$:

$$K_*(\alpha,f) < (\gamma,h) > = (f_r \cdot h_\phi + h_r \cdot f_\phi)/_{\partial B}$$

wobei $h = D\theta(\alpha \circ u) < \gamma \circ u + \alpha' \circ u\tilde{h} >$.

2.4. Bemerkung:

Da $K(\alpha,f) = 0$ nichts anderes bedeutet als $f_z \cdot f_z = 0$, sieht man leicht ein, daß die Nullstellen von K invariant sind unter konformen Transformationen des Einheitskreises auf sich.

Am leichtesten einer Untersuchung zugänglich ist das Differential von K an einer H-Fläche, d.h. in einer Nullstelle, eingeschränkt auf die vertikale Komponente $T_f\eta$. Es gilt:

2.5. Satz:

Ist $(\alpha,f) \in \eta$, $K(\alpha,f) = 0$, dann ist

$K_*(\alpha,f)|_{T_f\eta(\alpha)}$ Fredholmsch vom Index 0.

2.6. Korollar:

In dieser Situation gilt weiter:

$K_*(\alpha,f) < T_{(\alpha,f)}\eta >$ ist abgeschlossen und hat endliche Kodimension (in $H^{s-1-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R})$).

Beweis von 2.6.:

Satz 2.5. sagt insbesondere, daß $K_*(\alpha,f) < T_f\eta(\alpha) >$ abgeschlossen ist und in $H^{s-1-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R})$ endliche Kodimension hat. Vergrößert man die Urbildmenge, können also höchstens endlich viele Dimensionen zum Bild hinzukommen, was an der Abgeschlossenheit nichts ändert. □

Der eigentliche Beweis von 2.5. bedarf einiger Vorbereitung.

2.7. Lemma:

Sei $(\alpha,f) \in \eta$, $K(\alpha,f) = 0$, $f|_{\partial B} = \alpha \circ u$.
Weiter sei $\hat{h} \in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R})$, $\tilde{g} \in H^{s-1-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R})$
und $h := D[\ldots] < \alpha' : u\hat{h} >$.

Dann gilt:

$$K_*(\alpha,f) < (0,h) > = \tilde{g} \Leftrightarrow \Delta h - 2H(f_x \wedge h_y + h_x \wedge f_y) = 0 \text{ auf } B$$

$$h \cdot t_2 \circ u = h \cdot t_3 \circ u = 0 \qquad \text{auf } \partial B$$

$$h_r \cdot f_\phi + f_r \cdot h_\phi = \tilde{g}$$

wo $t_j \in H^{s+1-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R}^3)$, $j=1,2,3$, das begleitende Dreibein zu α darstellt.

Beweis:

Die Eigenschaft "$h/_{\partial B}$ tangential zu f_ϕ bzw. $\alpha' \circ u$" wird umformuliert zu $h \cdot t_2 \circ u = h \cdot t_3 \circ u = 0$.

Der Rest ist bereits bekannt. □

2.8. Lemma:

Sei $(\alpha,f) \in \mathcal{N}$ wie in 2.7.

Dann gibt es für schwache Lösungen des elliptischen Systems

$$\Delta h - 2H(f_x \wedge h_y + h_x \wedge f_y) = 0 \quad \text{auf } B$$

$$h \cdot t_2 \circ u = h \cdot t_3 \circ u = 0 \qquad (2.1.1)$$

$$h_r \cdot f_\phi + f_r \cdot h_\phi = \tilde{g} \qquad \text{auf } \partial B$$

ein $c > 0$, so daß

$$\|h\|_{H^s(B,\mathbb{R}^3)} \leq c\left(\|\tilde{g}\|_{H^{s-1-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R})} + \|h\|_{L^2(B,\mathbb{R}^3)}\right)$$

Beweis:

Daß dieses System elliptisch im Sinne von [5] ist und die dort eingeführte "complementing condition" am Rand erfüllt,

wurde in [14], Lemma 2.7. nachgewiesen. Was der direkten Anwendung von [5], Th. 10.5. im Wege steht, ist die $H^{s-\frac{1}{2}}$- bzw. $H^{s-1-\frac{1}{2}}$-Regularität der Koeffizienten der Randoperatoren, weil für diese C^s bzw. C^{s-1} gefordert wird. Analysiert man den Beweis dieses Regularitätssatzes im Hinblick auf den vorliegenden Spezialfall, erkennt man:

Die Transformation auf den Halbraum leistet eine konforme (C^∞-)Abbildung, die die Gleichung (konstante Koeffizienten im Hauptteil) invariant läßt. Deshalb ist die einzige Stelle, wo die Regularität der Randkoeffizienten eingeht, die Abschätzung analog zu (15.2), (15.3) in [4], die wegen der Algebra-Eigenschaft der H^s-Räume (für $s \geq 2$) keine Schwierigkeiten bereitet und formal dieselbe Gestalt annimmt. □

Dadurch wissen wir, daß Ker $K_*(\alpha,f) \cap T_f\eta(\alpha)$ endlichdimensional ist.

2.9. Lemma:

Sei $(\alpha,f) \in \eta$, $f|_{\partial B} = \alpha \circ u$, $K(\alpha,f) = 0$.
Für jedes $\tilde{\tilde{g}} \in H^{s-1-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R})$ gilt:
$\tilde{\tilde{g}}$ liegt im L^2-Komplement von $K_*(\alpha,f) < T_f\eta(\alpha) >$

$\Leftrightarrow \quad g := D\theta(\alpha \circ u) < \tilde{\tilde{g}} f_\phi > \in \text{Ker } K_*(\alpha,f)$

Beweis:

Sei $\tilde{\tilde{g}} \in H^{s-1-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R})$ und

$$\oint_{\partial B} (h_r \cdot f_\phi + f_r \cdot h_\phi) \cdot \tilde{\tilde{g}}\, ds = 0 \quad \forall\, h \in T_f\eta(\alpha)$$

Setze $g := D\Theta(\alpha \circ u) < \tilde{g} f_\phi >$, d.h. g ist die Lösung von

$$\begin{aligned} \Delta g - 2H(g_x \wedge f_y + f_x \wedge g_y) &= 0 \quad \text{auf} \quad B, \\ g/_{\partial B} &= \tilde{g} f_\varsigma /_{\partial B} \end{aligned} \tag{2.1.2.}$$

Durch partielle Integration und zweimaliges Anwenden von Lemma 1.8. erhält man:

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\partial B} h_r \cdot \tilde{g} f_\phi + \tilde{g} f_r \cdot h_\phi \, ds \\ &= \oint_{\partial B} g_r \cdot h + 2H\, g_\phi \wedge f \cdot h - 2H\, h_\phi \wedge f \cdot g - (\tilde{g} f_r)_\phi \cdot h \, ds = \\ &= \oint_{\partial B} g_r \cdot h + 2H\, g_\phi \wedge f \cdot h + 2H\, f_\phi \wedge g \cdot h + 2H\, f \wedge g_\phi \cdot h \\ &\qquad - (\tilde{g} f_r)_\phi \cdot h \, ds = \\ &= \oint_{\partial B} (g_r - (\tilde{g} f_r)_\phi) \cdot h \, ds = 0 \end{aligned}$$

h ist aber von der Form $\alpha' \circ u\tilde{h}$, $\tilde{h} \in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R})$, so daß

$(g_r - (\tilde{g} f_r)_\phi) \cdot \alpha' \circ u = 0$ auf ∂B folgt.

Nun gilt wegen $f_r \cdot f_\phi = 0$ und $f_{r\phi} \cdot f_\phi + f_r f_{\phi\phi} = 0$ auf ∂B

$$\begin{aligned} g_r \cdot f_\phi + g_\phi \cdot f_r &= g_r \cdot f_\phi + (\tilde{g} f_\phi)_\phi \cdot f_r = \\ &= g_r \cdot f_\varsigma + \tilde{g} f_{\varsigma\varsigma} \cdot f_r = \\ &= g_r \cdot f_\varsigma - \tilde{g} f_\phi \cdot f_{r\phi} = \\ &= (g_r - (\tilde{g} f_r)_\varsigma) \cdot f_\varsigma = 0 \end{aligned}$$

Daher ist $g \in \operatorname{Ker} K_*(\alpha, f) \cap T_f \eta(\alpha)$.

Alle diese Schlüsse lassen sich umkehren, womit wir die Behauptung bewiesen haben. □

Lemma 2.9. besagt insbesondere, daß das L^2-Komplement des Bildes von $K_*(\alpha,f)/T_f\eta(\alpha)$ dieselbe (endliche) Dimension hat wie Ker $K_*(\alpha,f) \cap T_f\eta(\alpha)$. Zwar ist das Komplement an sich nicht unabhängig vom Skalarprodukt, jedoch seine endliche Dimension ([37], Ch.2, Th 6.2.). Wie in Satz 2.5. behauptet, bildet $K_*(\alpha,f)/T_f\eta(\alpha)$ somit einen Fredholm-Operator vom Index 0.

2.10. Bemerkung:

Die Abbildungen in Ker $K_* \cap T_f\eta(\alpha)$ bestimmen diejenigen Richtungen, in die man die H-Fläche f mit Randkurve α (infinitesimal) stören kann, ohne die konforme Parametrisierung zu beeinträchtigen. In der Sprache der klassischen Variationsrechnung würde man daher diese Abbildungen als "Jacobifelder" zu f bezeichnen. Einen Teilraum davon werden wir später explizit angeben. Leider gelingt es bisher nicht, diese Jacobifelder allgemein zu jeder vorgegebenen H-Fläche zu berechnen. In der Literatur werden nur die generischen Fälle behandelt, wo f eben "nicht entartet" ist, bzw. keine eigentlichen Jacobifelder besitzt.

Wüßten wir, daß die Dimension der Jacobifelder stabil gegen Störungen von f ist, könnten wir eventuell einen geeigneten Rangsatz anwenden. Bis auf Spezialfälle (z.B. f striktes relatives Minimum des Energiefunktionals, [47]) ist dies jedoch nicht zu erwarten.

Wir gehen nun daran, das Kobild von K_* bez. des Gesamtraumes $T_{(\alpha,f)}\eta$ zu charakterisieren.

2.11. Lemma:

Sei $(\alpha,f) \in \eta$, $f/_{\partial B} = \alpha \circ u$, $K(\alpha,f) = 0$.
Für jedes $\tilde{g} \in H^{s-1-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R})$ gilt:

$\tilde{g}$ ist im L^2-Komplement von $K_*(\alpha,f) < T_{(\alpha,f)}\eta >$

$\Leftrightarrow$ g erfüllt das Gleichungssystem:

$$\Delta g - 2H(g_x \wedge f_y + f_x \wedge g_y) = 0 \quad \text{auf} \quad B$$

$$g/_{\partial B} = \tilde{g} f_\phi /_{\partial B} \qquad (2.1.3.)$$

und: $g_r - (\tilde{g} f_r)_\phi = 0$ auf ∂B

Beweis:

Sei $\tilde{g} \in H^{s-1-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R})$ und

$$0 = \oint_{\partial B} (h_r \cdot f_\phi + f_r \cdot h_\phi)\tilde{g}\, ds \quad \forall\, h \in T_{(\alpha,f)}\eta,$$

dann ergibt mit $g := D\Theta(\alpha \circ u) < \tilde{g} f_\phi >$ die gleiche Rechnung wie im Beweis zu 2.9. die Beziehung:

$$\oint_{\partial B} (g_r - (\tilde{g} f_r)_\phi) \cdot h\, ds = 0 \quad \forall\, h \in T_{(\alpha,f)}\eta$$

Die Randwerte von $T_{(\alpha,f)}\eta$ liegen aber dicht in $H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R}^3)$ und damit in $L^2(\partial B, \mathbb{R}^3)$ (Lemma 1.20.).
Daraus folgt die behauptete Beziehung und umgekehrt. □

2.12. Bemerkung:

Das Kobild von $K_*(\alpha,f)$ ist via der Identifikation (2.1.2.) isomorph zu einem Teilraum von Ker $K_*(\alpha,f) \cap T_f\eta(\alpha)$ (Lemma 2.9.). Ker $K_*(\alpha,f)$ insgesamt wird unendlichdimensional sein, so daß $K_*(\alpha,f)$ auf $T_{(\alpha,f)}\eta$ keinen Fredholm-

operator bildet. Auch ist die Regularität der Abbildungen aus Ker $K_*(\alpha,f)$ nicht natürlich durch ein elliptisches Randwertproblem gegeben, sondern wird durch unseren Ansatz erzwungen.

2.2 Die erzwungenen Jacobifelder - Verzweigungspunkte

In diesem Abschnitt sollen die Lösungen des Systems (2.1.3.) gefunden werden. Dazu müssen wir etwas weiter ausholen.

2.13. Definition:

Sei $(\alpha,f) \in \eta$, $K(\alpha,f) = 0$.
Eine Abbildung $h \in H^s(B,\mathbb{R}^3)$ heißt erzwungenes Jacobifeld zur H-Fläche f, wenn

(2.2.1.) $h \in \operatorname{Ker} K_*(\alpha,f) \cap T_f\eta(\alpha)$

d.h. $\Delta h - 2H(f_x \wedge h_y + h_x \wedge f_y) = 0$ auf B

$h \cdot t_2 \circ u = h \cdot t_3 \circ u = 0$ auf ∂B

$h_r f_\varphi + f_r h_\varphi = 0$

(2.2.2.) h "global tangential" an f, d.h. h ist von der Form $h = Lf_x + Mf_y$ mit fast überall definierten Funktionen $L,M : B \to \mathbb{R}$.

2.14. Bemerkung:

Wegen der Invarianz der Nullstellen von K unter der konformen Gruppe des Einheitskreises sind im allgemeinen unter den Jacobifeldern auch solche, die nur von einer

Umparametrisierung der Fläche f induziert werden, nicht aber durch eine Störung des "geometrischen Gebildes" f.

Ist $id+\phi$ eine konforme Störung der Identität auf B mit der Abbildung $\phi=(\phi_1,\phi_2)$ und "entwickelt" man:

$$f \circ (id+\phi) \approx f + f_x\phi_1 + f_y\phi_2 + \ldots,$$

so taucht ganz natürlich die Bedingung (2.2.2.) der Tangentialität auf. Daher der Begriff: (von der konformen Gruppe) "erzwungene Jacobifelder". Betrachtet man die Bedingung (2.2.2.) genauer, erkennt man: h ist selbst dann noch regulär, wenn man an den Nullstellen von f_x,f_y gewisse Singularitäten (Pole) von L,M zuläßt!

Das Nullstellenverhalten von f_x,f_y ist seit langem gut untersucht ([27], [25], [6]).

2.15. Definition:

Sei $f \in C^1(B,\mathbb{R}^3)$. Dann heißt $z_o = x_o+iy_o \in B$ (innerer) Verzweigungspunkt von f, wenn der Rang der Matrix $Df(z_o) = (f_x(z_o),f_y(z_o))$ nicht maximal gleich 2 ist.

Ist f eine H-Fläche (konform parametrisiert), so kann der Rang der Ableitung $Df(z_o)$ nur 0 oder 2 betragen, da f_x und f_y entweder linear unabhängig oder beide gleich 0 sind. Diese Eigenschaft bleibt erhalten für hinreichend reguläre Abbildungen in Umgebung einer H-Fläche. In solchen Fällen gilt:

$z_o \in B$ ist Verzweigungspunkt von $f \Leftrightarrow f_z(z_o) = \frac{\partial}{\partial z} f(z_o) = 0$

Für H-Flächen ist das Verhalten um den Verzweigungspunkt vergleichbar mit demjenigen von holomorphen Funktionen,

genauer (siehe [6], § 1.):

Ist $z_o \in B$ ein Verzweigungspunkt der H-Fläche f, so gibt es eine δ-Umgebung $B_\delta(z_o)$, ein $a \in \mathbb{C}^3$, $a \neq 0$ und ein $\lambda \in \mathbb{N}$, so daß

$$f_z(z) = a(z-z_o)^\lambda + o(|z-z_o|^\lambda) \quad \forall\, z \in B_\delta(z_o)$$

λ heißt die Ordnung des Verzweigungspunktes.

Durch die Wahl der Rand-Parametrisierungen haben wir für unsere Untersuchungen die Existenz von Randverzweigungspunkten ausgeschlossen.

Wie bei den Minimalflächen kann man auch bei den H-Flächen durch Beschränkung der Totalkrümmung $\kappa(\alpha) := \oint_{\partial B} |\alpha''| ds$ und der Länge $\ell(\alpha) := \oint_{\partial B} |\alpha'| ds$ der Randkurve α das Verzweigungsverhalten abschätzen. Es gilt unter den Normierungsbedingungen $\|f\|_\infty \leq 1, |H| < 1$ die Formel von Nitsche-Sasaki-Hildebrandt ([25], Th. 2.):

$$1 + \sum_{z_o \text{ Verzwpkt.}} \lambda(z_o) \leq \frac{\kappa(\alpha)}{2\pi} + \frac{H^2}{16(1-|H|)}\, \ell^2(\alpha) \qquad (2.2.3.)$$

wo $\lambda(z_o)$ die Ordnung des Verzweigungspunktes kennzeichnet.

Wir halten zusammenfassend fest:

2.16. Lemma:

Sei $\alpha \in \mathcal{A}$ mit $\frac{\kappa(\alpha)}{2\pi} + \frac{H^2}{16(1-|H|)}\, \ell^2(\alpha) \leq k$
und $(\alpha, f) \in \eta$, $K(\alpha, f) = 0$.

Dann ist die Zahl und Ordnung der (inneren) Verzweigungspunkte von f endlich und:

f hat in $z_o \in B$ einen Verzweigungspunkt der Ordnung $\lambda \in \mathbb{N}$

$$\Leftrightarrow \quad \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^j f(z_o) = 0 \quad \text{für } j=1,\dots,\lambda$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\lambda+1} f(z_o) \neq 0. \qquad (2.2.4.)$$

2.17. Bemerkung:

Solange wir die Verzweigungspunkte festhalten, brauchen wir an f keine zusätzlichen Regularitätsforderungen zu stellen, weil diese punktuell automatisch erfüllt sind. Erst wenn wir die Verzweigungspunkte variieren, müssen wir auf hinreichende Differenzierbarkeit von f achten - dies zum Unterschied zu den Minimalflächen, wo $\frac{\partial}{\partial z} f$ holomorph, mithin C^∞, ist.

Zurück zu den erzwungenen Jacobifeldern. Zwar liegt die Situation hier ganz ähnlich wie bei den Minimalflächen (man vergleiche dazu [15], § 5,6), doch werden wir etwas andere Akzente setzen, die stärker auf dem klassischen Riemann-Hilbert-Problem für holomorphe bzw. meromorphe Funktionen beruhen. Einen Abriß der zugrunde liegenden Theorie findet man in [53], Ch. 1.

2.18. Lemma:

Sei $\tau : \partial B \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion mit $e^{i\tau} \in C^{1,\nu}(\partial B, \mathbb{C})$, $0 < \nu < 1$.

Weiter sei $n := \frac{1}{2\pi} \oint_{\partial B} d \arg e^{i\tau} \leq 0$ die Windungszahl der Abbildung $e^{i\tau}$ (∂B positiv orientiert). Dann hat das homogene Riemann-Hilbert-Problem

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0 \quad \text{auf} \quad B, \quad \operatorname{Re} e^{i\tau} \varphi|_{\partial B} = 0$$

genau $2|n|+1$ $\mathbb{R}$-linear unabhängige, holomorphe Lösungen $\psi \in C^{1,\nu}(\bar{B},\mathbb{C})$, gekennzeichnet durch $|n|$ beliebig vorgegebene Nullstellen $z_1,\ldots,z_{|n|} \in B$.

Beweis:

Siehe [53], Th. 1.2.2., 1.2.3., 1.2.4. □

2.19. Lemma:

Seien $z_1,\ldots,z_p \in B$ paarweise verschiedene Punkte und $\lambda_1,\ldots,\lambda_p \in \mathbb{N}$; $|\lambda| := \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$; $\dot{B} := B \setminus \{z_1,\ldots,z_p\}$.
Dann gibt es genau $2|\lambda|+3$ linear unabhängige Funktionen $\Psi : \dot{B} \to \mathbb{C}$ mit folgenden Eigenschaften:

(2.2.5.) Ψ holomorph auf $\dot{B}$, stetig fortsetzbar auf ∂B

(2.2.6) Ψ ist beschränkt in z_j oder hat dort einen Pol höchstens von der Ordnung λ_j, $j=1,\ldots,p$.

(2.2.7.) $\operatorname{Re} \frac{\Psi(z)}{z} = 0$ für $z \in \partial B$.

Beweis:

Wir führen die Aussage auf den Fall von Lemma 2.18. zurück.

Setze: $\tilde{\Psi}(z) := \Psi(z) \prod_{j=1}^{p} (z-z_j)^{\lambda_j}$

Ψ erfüllt (2.2.5.-7.) $\Leftrightarrow$ $\tilde{\Psi}_{\overline{z}} = 0$ auf B

$$\operatorname{Re} \frac{\tilde{\Psi}(z)}{z \prod_{j=1}^{p} (z-z_j)} = 0 \quad \text{auf } \partial B$$

Da die Windungszahl der Randbedingung offensichtlich $-(|\lambda|+1)$ beträgt, gibt es nach Lemma $2.18.2|\lambda|+3$ $\mathbb{R}$-linear unabhängige, holomorphe Lösungen $\tilde{\Psi}$. Entsprechend viele Ψ's gibt es dann. □

2.20. Lemma:

Sei $f \in \mathcal{H}$, Φ holomorph in B.

Dann erfüllen die Abbildungen $h_1 := \mathrm{Re}\ \Phi f_z$ und $h_2 := \mathrm{Im}\ \Phi f_z$ die Gleichung $\Delta h - 2H f_x \wedge h_y + h_x \wedge f_y = 0$ auf B.

Beweis:

In komplexer Notation schreibt sich die obige Gleichung:

$$h_{z\bar{z}} - iH(f_{\bar{z}} \wedge h_z + h_{\bar{z}} \wedge f_z) = 0 \quad \text{(analog 1.1.5.)}$$

Sei Φ holomorph und $f_{z\bar{z}} = iH\, f_{\bar{z}} \wedge f_z$;

dann ist für $h = \Phi f_z$:

$$h_z = \Phi_z f_z + \Phi f_{zz} ,$$

$$h_{\bar{z}} = \Phi f_{z\bar{z}} = iH\, \Phi\, f_{\bar{z}} \wedge f_z$$

$$h_{z\bar{z}} = iH\, \Phi_z\, f_{\bar{z}} \wedge f_z + iH\, \Phi\, f_{\bar{z}z} \wedge f_z + iH\, \Phi\, f_{\bar{z}} \wedge f_{zz}.$$

Durch Einsetzen prüft man, daß dieses h die Gleichung erfüllt. Analog zeigt man, daß auch $\overline{h} = \overline{\Phi f_z} = \overline{\Phi} f_{\bar{z}}$, eine Lösung darstellt, woraus die Behauptung unmittelbar folgt. □

2.21. Satz:

Sei $(\alpha, f) \in \Pi$, $K(\alpha, f) = 0$.

f habe genau p verschiedene Verzweigungspunkte $z_1, \ldots, z_p \in B$ der Ordnung $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{N}$; $\dot{B} = B \setminus \{z_1, \ldots, z_p\}$. Weiter sei die Abbildung $h : \dot{B} \to \mathbb{R}^3$ tangential an f, d.h. es gebe Funktionen $L, M : \dot{B} \to \mathbb{R}$, so daß

$$h = Lf_x + Mf_y$$

Dann gilt:

h ist erzwungenes Jacobifeld

$\Leftrightarrow$ Die komplexe Funktion $\Psi = L+iM$ erfüllt:

(2.2.5.) Ψ holomorph auf $\dot{B}$, stetig fortsetzbar auf ∂B

(2.2.6.) Ψ ist beschränkt in z_j oder hat dort einen Pol höchstens von der Ordnung λ_j, $j=1,\ldots,p$

(2.2.7.) $\operatorname{Re} \frac{\Psi(z)}{z} = 0$ für $z \in \partial B$.

Beweis:

"$\Rightarrow$": Sei $h \in H^s(B,\mathbb{R}^3)$ ein erzwungenes Jacobifeld

und $\mu := |f_x| = |f_y|$.

Es ist $h = Lf_x+Mf_y = 2\operatorname{Re}(L+iM)f_z = (L+iM)f_z + (L-iM)f_{\bar{z}}$.

Die Randbedingung $f_r h_\phi + h_r f_\phi = 0$ bedeutet (analog zu Lemma 1.4.) nichts anderes als $f_z \cdot h_z \equiv 0$ auf B.

$$h_z = (L+iM)_z f_z + (L+iM) f_{zz} + (L-iM)_z f_{\bar{z}} + (L-iM) f_{\bar{z}z}$$

wegen $f_z \cdot f_z \equiv 0$, $f_{zz} \cdot f_z \equiv 0$ gilt:

$$h_z \cdot f_z = (L-iM)_z f_{\bar{z}} \cdot f_z = \overline{(L+iM)_{\bar{z}}}\, \mu^2 \equiv 0 \qquad (2.2.8.)$$

Das heißt, daß $\Psi = L+iM$ auf $\dot{B}$ holomorph ist.

Aus $L = \frac{h \cdot f_x}{\mu^2}$, $M = \frac{h \cdot f_y}{\mu^2}$ liest man die Bedingung (2.2.6.) ab, da ja f_x, f_y und μ dasselbe Nullstellenverhalten zeigen.

Nun ist $h/_{\partial B} = 2 \operatorname{Re} \frac{\Psi(z)}{z} z f_z \underset{(1.1.8.)}{=} \operatorname{Re} \frac{\Psi(z)}{z} (f_r - i f_\phi)$

$$= (\operatorname{Re} \tfrac{\Psi(z)}{z}) f_r - (\operatorname{Im} \tfrac{\Psi(z)}{z}) f_\phi \qquad (2.2.9.)$$

$h/_{\partial B}$ war parallel zu f_ϕ vorausgesetzt, daher

$$\mathrm{Re}\ \frac{\Psi(z)}{z} = 0 \quad \forall\ z \in \partial B.$$

"$\Leftarrow$" Falls Ψ die Eigenschaften (2.2.5.-7.) besitzt, so wissen wir aus Lemma 2.20., daß $h = \mathrm{Re}\ \Psi f_z$ die Differentialgleichung in B erfüllt. Außerdem ist h im Innern wegen der Anpassung der Pole an die Ordnung der Verzweigungspunkte und am Rand wegen Lemma 2.19. beschränkt, somit $h \in L^2(B,\mathbb{R}^3)$. Wie man aus den Rechnungen zu (2.2.8.), (2.2.9.) erkennt, erfüllt dieses h die für erzwungene Jacobifelder geforderten Randbedingungen. Dann liefert das Regularitätslemma 2.8. die restliche Aussage. □

2.22. Korollar:

Unter den Voraussetzungen von Satz 2.21 gilt:
Der Raum der erzwungenen Jacobifelder an f hat die Dimension $2|\lambda|+3$.

Beweis: Klar. □

2.23. Bemerkung:

Die meromorphen Lösungen aus Lemma 2.19. lassen sich durch einen Potenzreihenansatz explizit ausrechnen (siehe [15], Lemma 5.5, 5.6). Es gibt darunter drei holomorphe Lösungen, die der 3-parametrigen Schar der Automorphismen des Einheitskreises entsprechen. Man kann sie angeben mit:

$$\Psi_0(z) := iz,\ \Psi_1(z) := z^2-1,\ \Psi_2(z) = i(z^2+1)$$

Die zugehörigen Jacobifelder $J_1 = \operatorname{Re}\, {}_jf_z$ und $J_2 = \ldots$ haben die Randwerte:

$$J_{1\,|\partial B} = \frac{1}{2} f_\alpha \cdot J_{2\,|\partial B} = \sin\varphi\, f_\varphi \cdot J_{1\,|\partial B} = \cos\varphi\, f_\varphi$$

Die übrigen $J_\ldots$ Funktionen besitzen mindestens einen Pol im Innern.

2.24. Definition:

Sei $(\alpha,f) \in \mathfrak{n}$, $K(\alpha,f) = 0$.

f habe p verschiedene Verzweigungspunkte in $z_1,\ldots,z_p \in B$ der Ordnungen $\lambda_1,\ldots,\lambda_p \in \mathbb{N}$; $|\lambda| = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j$; $\dot{B} = B \setminus \{z_1,\ldots,z_p\}$.

Mit ψ_j, $j=0,\ldots,2|\lambda|+2$, bezeichnen wir eine Auswahl von Basiselementen des Lösungsraums des Riemann-Hilbert-Problems (2.2.5.-7.).

Weiter definieren wir:

$$J(\underline{z},\underline{\lambda}) := \operatorname{span}\{\operatorname{Im} \frac{\psi_j(z)}{z}\,/_{\partial B}\ |j=0,\ldots,2|\lambda|+2\}$$

$$= \{\operatorname{Im} \frac{\psi(z)}{z}\,/_{\partial B}\ |\ \psi \text{ erfüllt (2.2.5.-7.)}\}.$$

Nun können wir den Hauptsatz dieses Kapitels formulieren und beweisen, der das Kobild von $K_*(\alpha,f)$ endgültig und explizit charakterisiert:

2.25. Satz:

(α,f) erfülle die Forderungen in Def. 2.24.

Dann gilt:

$$K_*(\alpha,f) < T_{(\alpha,f)}\mathfrak{n} > \ \oplus\ J(\underline{z},\underline{\lambda}) = H^{s-1-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R})$$

Mit anderen Worten: für $\tilde{g} \in H^{s-1-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R})$ gilt:

$$\tilde{g} \in K_*(\alpha,f) < T_{(\alpha,f)}\eta > \Leftrightarrow \oint \tilde{g}\,\phi\,ds = 0 \quad \forall\, \phi \in J(\underline{z},\underline{\lambda})$$

Beweis:

In Lemma 2.11. haben wir das L^2-Komplement vom Bild $K_*(\alpha,f)$ bestimmt als den endlich dimensionalen Raum $V := \{\tilde{g} \in H^{s-1-\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R}) \mid \exists\, g \in H^{s-1}(B,\mathbb{R}^3)$ mit:

$$\Delta g - 2H(g_x \wedge f_y + f_x \wedge g_y) = 0 \quad \text{auf} \quad B,$$

$$g/_{\partial B} = \tilde{g} f_\phi \text{ und } g_r - (\tilde{g} f_r)_\phi = 0 \quad \text{auf } \partial B\}$$

Wir werden nun zeigen:

(i) $\tilde{g} \in K_*(\alpha,f) < T_{(\alpha,f)}\eta > \Rightarrow \tilde{g} \perp J(\underline{z},\underline{\lambda})$

(ii) $\tilde{g} \in V \Rightarrow \tilde{g} \in J(\underline{z},\underline{\lambda})$

Zusammen mit der Aussage $\tilde{g} \perp K_*(\alpha,f) < T_{(\alpha,f)}\eta > \Leftrightarrow \tilde{g} \in V$ folgt dann die Gleichheit der endl.dim. Räume $J(\underline{z},\underline{\lambda})$ und V und die Beh. des Satzes.

Zu (i):

Sei $f/_{\partial B} = \alpha \circ u$, $h := D\theta(\alpha \circ u) < \gamma \circ u + \alpha' \circ u\tilde{h} > \in T_{(\alpha,f)}\eta$.
Setzt man $\tilde{g} = K_*(\alpha,f) < (\gamma,h) >$, bedeutet das:

$$f_r \cdot h_\phi + f_\phi \cdot h_r/_{\partial B} = \tilde{g}$$

bzw. $\quad -4\,\mathrm{Im}\, z^2 f_z \cdot h_z/_{\partial B} = \tilde{g}.$

Sei $\psi \in \mathrm{span}\{\psi_j / j=0,\ldots,2|\lambda|+2\}$, dann ist $z^2 f_z \cdot h_z \cdot \frac{\psi}{z^2}$ holomorph auf $\bar{B}$ und nach dem Cauchy'schen Integralsatz

$$\oint_{\partial B} z^2 f_z \cdot h_z\, \psi/_{z^2}\, dz = 0$$

Wir berechnen:

$$0 = \operatorname{Im} \oint_{\partial B} z^2 f_z \cdot h_z \, {}^{\Psi}/_{z^2} \, dz =$$

$$= \operatorname{Im} i \oint_{\partial B} z^2 f_z \cdot h_z \, {}^{\Psi}/_{z^2} \, z ds$$

$$= -\operatorname{Re} \oint z^2 f_z h_z \, {}^{\Psi}/_{z} \, ds =$$

$$= -\oint (\operatorname{Re} z^2 f_z \cdot h_z)(\operatorname{Re} {}^{\Psi}/_{z}) - (\operatorname{Im} z^2 f_z \cdot h_z)(\operatorname{Im} {}^{\Psi}/_{z}) ds$$

$$= 2 \oint \tilde{g} \operatorname{Im} {}^{\Psi}/_{z} \, ds.$$

Zu (ii):

Sei $\tilde{g} \in V$. Wir werden zeigen, daß das zugehörige g mit ${}^{g}/_{\partial B} = \tilde{g} f_{\phi}$ einem erzwungenen Jacobifeld entspricht.

Klar ist, daß $g \in \operatorname{Ker} K_*(\alpha, f) \cap T_f \eta(\alpha)$. Daher genügt es nachzuweisen, daß g global tangential an f ist. d.h. daß aus dem Ansatz

$$g = Lf_x + Mf_y + Nt \quad \left(t := \frac{f_x \wedge f_y}{|f_x \wedge f_y|} \text{ sei die Normale}\right),$$

zusammen mit den Randbedingungen $N \equiv 0$ folgt. Den Rechnungen im Anhang (Lemma 5.3.) entnehmen wir, daß in dieser Situation N einer elliptischen Gleichung auf B genügt, nämlich:

$$\Delta N + q^2 N = 0 \qquad \text{mit } q \in C^2(\dot{B} \cup \partial B, \mathbb{R})$$

$${}^{N}/_{\partial B} = 0$$

Dieses Randwertproblem könnte durchaus nichttriviale Lösungen besitzen, die wir ausschließen, indem wir zusätzlich $\frac{\partial}{\partial r} {}^{N}/_{\partial B} = 0$ zeigen. Dann aber folgt nach [20], Satz 2, $N \equiv 0$ auf B.

Daher modifizieren wir den Ansatz zu

$$g = \tilde{L} f_r + \tilde{M} f_\phi + Nt \text{ auf } B.$$

Somit ist:

$$g/_{\partial B} = \tilde{M} f_\phi \text{ mit } \tilde{M} = \tilde{g}$$

$$g_r/_{\partial B} = \tilde{L}_r f_r + \tilde{M}_r f_\phi + \tilde{M} f_{\phi r} + N_r t$$

Nach Voraussetzung:

$$\begin{aligned} 0 = g_r - (\tilde{g} f_r)_\phi &= \tilde{L}_r f_r + \tilde{M}_r f_\phi + \tilde{M} f_{\phi r} + N_r t \\ &\quad - \tilde{M}_\phi f_r - \tilde{M} f_{\phi r} \\ &= (\tilde{L}_r - \tilde{M}_\phi) f_r + \tilde{M}_r f_\phi + N_r t \end{aligned}$$

Wegen der linearen Unabhängigkeit ist diese Gleichung nur im Fall $N_r/_{\partial B} = 0$ erfüllt. □

2.26. Bemerkung:

Die Dimension des Kobildes von $K_*(\alpha, f)$ in einer H-Fläche $f \in \eta(\alpha)$ hängt also ab von Anzahl und Ordnung der Verzweigungspunkte von f. Diese werden durch eine gemeinsame Nullstelle in den drei Komponenten von f_z beschrieben. Schon beliebig kleine Störungen, deren Komponenten nicht miteinander gekoppelt sind, werden daher eine solche Nullstelle zum Verschwinden bringen. Deshalb kann man nicht erwarten, daß der Korang von K_* lokal konstant ist.

Kap. III Analysis des globalen Plateau-Problems

In diesem Kapitel werden wir die eben erarbeiteten Ergebnisse benützen, um Aussagen über die Struktur der Lösungsmenge $N = K^{-1}(0)$ des Plateau-Problems zu gewinnen.

Wir modifizieren den Ansatz dahingehend, daß wir nur noch H-Flächen mit vorgeschriebenem Verzweigungsverhalten betrachten, da dies nach Satz 2.25 der bestimmende Parameter ist. Schränken wir alle betrachteten Mengen entsprechend ein, können wir hoffen, daß K_* auf der Nullstellenmenge einen stabilen Korang hat. Dabei folgen wir wieder [15], können aber dadurch, daß wir die Bildmengen explizit charakterisieren, den zusätzlichen Rangverlust einfacher darstellen als dort geschehen. Damit kann dann bewiesen werden, daß N eine Untermannigfaltigkeit in η^{λ} (η mit vorgeschriebenem Verzweigungstyp) darstellt.

Diese Aussage läßt noch keine Schlüsse zu über das faserweise Verhalten von $N \cap (\pi^{\lambda})^{-1}(\alpha)$ bei Störungen der Randkurve α. Dabei können Singularitäten auftreten. Solche Stellen kann man entdecken, wenn man die vertikalen Komponenten in $\operatorname{Ker} K_*(\alpha,f)$ sucht. Wie bereits bemerkt, ist jedoch $\operatorname{Ker} K_*(\alpha,f) \cap T_f\eta(\alpha)$ direkten Berechnungen schwer zugänglich.

Bei unserem Zugang wird jede Komponente von $\pi^{-1}(\alpha) \cap N$ mindestens 3-dimensional sein, hervorgerufen durch die

Invarianz unter der konformen Gruppe. Üblicherweise und bei Anzahluntersuchungen unumgänglich dividiert man diese Gruppenaktion aus, indem man eine "Drei-Punkte-Bedingung" auf dem Rand fordert und somit eine bestimmte konforme Parametrisierung auszeichnet. Für unsere Anwendungen in Kap. IV erweist sich diese Bedingung als ungeeignet, weswegen wir auch jetzt darauf verzichten.

Leider ergibt sich eine weitere Schwierigkeit darin, daß die Nullstellen von K entartet sind, d.h. dim Ker $K_*(\alpha,f) \cap T_f\eta(\alpha)$ ist nicht etwa in allen generischen Fällen gleich 3, sondern mindestens $2|\lambda|+3$ (Korollar 2.22.). Schränkt man die Bündelprojektion π^λ auf N ein, so kann man wenigstens zeigen, daß $\pi^\lambda/_N$ einen Fredholm-Operator bildet. Offenbar gilt dann in $(\alpha,f) \in \eta^\lambda$:

$$\text{Ker } \pi^\lambda/_N{}_* = \text{Ker } \pi^\lambda{}_* \cap \text{Ker } K_*$$

$$= T_f\eta^\lambda(\alpha) \cap \text{Ker } K_*$$

$$\text{Bild } \pi^\lambda/_N{}_* = \pi^\lambda{}_*(\text{Ker } K_*)$$

Die Entartung der Nullstellen ist somit endlich und die Stabilität des Index hat zur Folge, daß in den "Umkehrpunkten" der Mannigfaltigkeit $K^{-1}(0) \cap \eta^\lambda$ über $\mathcal{A}$ gerade so viele Vertikalkomponenten in Ker K_* entstehen, wie an Horizontalkomponenten verloren gehen.

Der Index einer H-Fläche $f \in \eta^\lambda(\alpha)$, d.h. der Index von $\pi^\lambda/_N{}_*$, kann als Maß interpretiert werden für die "Schwierigkeit", eine Richtung in $T_\alpha\mathcal{A}$ zu finden, in die man die Randkurve α stören darf.

3.1 Über H-Extremalen mit vorgeschriebenem Verzweigungsverhalten

Um eine gleichmäßige Beschränkung der Gesamtordnung der Verzweigungspunkte zu erreichen, führen wir nun - wie in Lemma 2.16./2.17. angedeutet - Schranken für Länge und Krümmung der zulässigen Randkurven ein.

Wir definieren jetzt neu:

$$\mathcal{O} := \{\alpha \in H^{s+2}(\partial B, \mathbb{R}^3) \mid \alpha \text{ injektiv}, |\alpha'| \neq 0, \kappa(\alpha) < c, \ell(\alpha) < c\},$$

wobei das $c > 0$ so gewählt werde, daß die Gesamtordnung der Verzweigungspunkte $\leq k \in \mathbb{N}$ ist. Entsprechend wird die Regularitätsordnung s als $s \geq \max(k+4,5)$ festgelegt.

3.1. Definition:

Seien $z_1,\ldots,z_p \in B$ paarweise verschieden, $\lambda_1,\ldots,\lambda_p \in \mathbb{N}$ und $|\lambda| \leq s-4$.

$$\mathcal{H}(\underline{\lambda},\underline{z}) := \{f \in \mathcal{H} \mid (\tfrac{\partial}{\partial z})^j f(z_k) = 0;\ j=1,\ldots,\lambda_k \quad (\tfrac{\partial}{\partial z})^{\lambda_k+1} f(z_k) \neq 0;\ k=1,\ldots,p \quad \text{und } \tfrac{\partial}{\partial z} f(z) \neq 0 \text{ sonst } \} \tag{3.1.1.}$$

$$\mathcal{H}^{\underline{\lambda}} := \bigcup_{\substack{z_1,\ldots,z_p \in B \\ \text{paarw.versch.}}} \mathcal{H}(\underline{\lambda},\underline{z})$$

3.2. Lemma:

Sei $\underline{\lambda} \in \mathbb{N}^p$, $z_1,\ldots,z_p \in B$ paarweise verschieden; dann

ist $\mathcal{H}(\underline{\lambda},\underline{z})$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{H}$ der reellen Kodimension $6|\lambda|$. Ist $f \in \mathcal{H}(\underline{\lambda},\underline{z})$, so gilt:

$$h \in T_f\mathcal{H}^{\lambda} \Leftrightarrow h \in T_f\mathcal{H} \text{ und } (\frac{\partial}{\partial z})^j h(z_k) = 0;\ j=1,\ldots,\lambda_k,\ k=1,\ldots,p$$

Beweis:

Die linearen Funktionale

$$f \mapsto (\frac{\partial}{\partial z})^j f(z_k), j=1,\ldots,\lambda_k;\ k=1,\ldots,p$$

sind unter der Voraussetzung $s \geq |\lambda|+4$ beschränkt und somit C^{∞}.

Die Bedingungen $\frac{\partial}{\partial z} f(z) \neq 0\ \forall z \in B$, bzw. $(\frac{\partial}{\partial z})^{\lambda_k+1} f(z_k) \neq 0$ charakterisieren eine offene Menge in $\mathcal{H}$, während das Urbild der Null unter den anderen Funktionalen eine Untermannigfaltigkeit der reellen Kodimension $6|\lambda|$ beschreibt, falls deren Differentiale in f

$$h \mapsto (\frac{\partial}{\partial z})^j h(z_k)$$

in $T_f\mathcal{H}$ linear unabhängig sind. □

Genau dies soll im folgenden Lemma 3.5. gezeigt werden.

3.5. Lemma:

Sei $f \in \mathcal{H}(\underline{\lambda},\underline{z})$ und $a_{jk} \in \mathbb{C}^3$ beliebig, $j=1,\ldots,\lambda_k$; $k=1,\ldots,p$. Dann gibt es ein $h \in T_f\mathcal{H}$ mit

$$(\frac{\partial}{\partial z})^j h(z_k) = a_{jk} \quad \text{für } j=1,\ldots,\lambda_k\ ;\ k=1,\ldots,p\ .$$

Beweis:

h erfüllt die Gleichung in der komplexen Form

$$h_{z\bar{z}} - iH\, f_{\bar{z}} \wedge h_z + iH\, f_z \wedge h_{\bar{z}} = 0 \quad . \tag{3.1.2}$$

h reellwertig, daher erfüllt $\tilde{h} := h_z$ die Gleichung

$$\tilde{h}_{\bar{z}} - iH\, f_{\bar{z}} \wedge \tilde{h} + iH\, f_z \wedge \overline{\tilde{h}} = 0$$

Wir suchen eine Lösung $\tilde{h}$ von der Form

$$\tilde{h} = g_o + pg$$

wo $g, g_o : \overline{B} \to \mathbb{C}^3$, mit

g_o holomorph und $(\frac{\partial}{\partial z})^j\, g_o(z_k) = a_{jk}$ $\begin{matrix} j=0,\ldots,\lambda_k-1 \\ k=1,\ldots,p \end{matrix}$

$$p(z) := \prod_{k=1}^{p} (z-z_k)^{\lambda_k}$$

Eingesetzt ergibt sich:

$$p\, g_{\bar{z}} - iH\, f_{\bar{z}} \wedge pg + iH\, f_z \wedge \overline{pg} = iH\, f_{\bar{z}} \wedge g_o - iH\, f_z \wedge \overline{g_o}$$

Nach Division durch p erhält man wieder eine Gleichung mit regulären Koeffizienten und rechter Seite mindestens $L^\infty(B)$, weil f_z in z_k genau von der Ordnung λ_k verschwindet. Auf diese Gleichung kann man die übliche Existenztheorie anwenden (siehe [53], sec. 3.2.).

Daraus folgt, daß der Operator

$$A : H^1(B,\mathbb{C}^3) \to H^0(B,\mathbb{C}^3) \times H^{\frac{1}{2}}(\partial B,\mathbb{R}^3)$$

$$g \to (g_{\bar{z}} - iH\, f_{\bar{z}} \wedge g + iH\, \frac{\bar{p}}{p}\, f_z \wedge \bar{g},\ \mathrm{Re}\, g_{/\partial B})$$

Fredholmsch ist, insbesondere hat Bild A endliche Kodimension.

Für festes g_o müßte also nicht unbedingt eine Lösung für die rechte Seite $iH\, \frac{f_{\bar{z}}}{p} \wedge g_o - iH\, \frac{f_z}{p} \wedge \bar{g}_o$ existieren. g_o darf aber in einen unendlichdimensionalen Raum variiert werden, damit auch $iH\, \frac{f_{\bar{z}}}{p} \wedge g_o - iH\, \frac{f_z}{p}\, \overline{g_o}$. Wäre das Bild von A orthogonal zu all diesen Funktionen, hätte es keine endliche Kodimension.

Also muß es ein geeignetes g_o geben, für das die Gleichung, etwa mit $\mathrm{Re}\, g_{/\partial B} = 0$, lösbar ist. Umgekehrt liefert das gefundene g und g_o durch nochmalige Integration eine Lösung von (3.1.2) mit den geforderten Eigenschaften. □

Damit ist Lemma 3.2. vollständig bewiesen, und wir können nun den Fall variabler Verzweigungspunkte betrachten.

3.6. Lemma:

Sei $\underline{\lambda} \in \mathbb{N}^p$;
dann ist $\mathcal{H}^{\underline{\lambda}}$ eine C^1-Untermannigfaltigkeit von $\mathcal{H}$ der

Kodimension $6|\lambda|-2p$. Ist $f \in \mathcal{H}(\underline{\lambda},\underline{z}) \subset \mathcal{H}^{\underline{\lambda}}$, so gilt:

$$h \in T_f\mathcal{H}^{\underline{\lambda}} \iff h \in T_f\mathcal{H} \text{ und:}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^j h(z_k) = 0 \qquad j=1,\ldots,\lambda_k-1;\ k=1,\ldots,p$$

$$\exists\, w_k \in \mathbb{C} : \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\lambda_k} h(z_k) = w_k \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\lambda_k+1} f(z_k)$$

Die Zuordnung $f \in \mathcal{H}^{\underline{\lambda}} \to (z_1,\ldots z_p) \in B^p$ ist differenzierbar.

Beweis:

Wir betrachten die Abbildung

$$P : \mathcal{H} \times B^p \to \mathbb{C}^{3|\lambda|}$$

$$(f,z_1,\ldots,z_p) \to \left(\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^j f(z_k)\right)_{\substack{j=1,\ldots,\lambda_k \\ k=1,\ldots,p}}$$

Unter der Voraussetzung $|\lambda|+4 \leq s$ ist P mindestens C^1, da für die Auswertungsfunktionale ein dem "Omega-Lemma" entsprechender Satz gilt ([2], Th. 12.4.).

Sei $f \in \mathcal{H}(\underline{\lambda},\underline{z}) \subset \mathcal{H}^{\underline{\lambda}}$, d.h. $P(f,z_1,\ldots,z_p) = \underline{0}$; dann ist für alle $h \in T_f\mathcal{H}$, $w_1,\ldots,w_p \in \mathbb{C}$:

$$DP(f,z_1,\ldots,z_p)\langle h,w_1,\ldots,w_p\rangle =$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^j h(z_k) + w_k \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{j+1} f(z_k)$$

$$= \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^j h(z_k); & j=1,\ldots,\lambda_k-1 \\ \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\lambda_k} h(z_k) + w_k \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{\lambda_k+1} f(z_k) & \\ \qquad\qquad k=1,\ldots,p & \end{cases}$$

Also ist $DP(f,z_1,\ldots,z_p)$ surjektiv und $P^{-1}(\underline{0})$ Untermannig-

faltigkeit von $\mathcal{H} \subset B^p$, lokal diffeomorph zu $\ker Dp(f,z_1,\ldots,z_p)$
Wegen $(\frac{\partial}{\partial z})^{\lambda_k+1} f(z_k) \neq 0$, kann man eine der je drei komplexen Gleichungen

$$(\frac{\partial}{\partial z})^{\lambda_k} h(z_k) + w_k (\frac{\partial}{\partial z})^{\lambda_k+1} f(z_k) = 0$$

nach $w_k \in \mathbb{C}$ auflösen und somit das Problem um $2p$ reelle Dimensionen erniedrigen. Folglich ist $\mathcal{H}^\Delta \subset \mathcal{H}$ Untermannigfaltigkeit der Kodimension $6|\lambda|-2p$. □

Wie in (1.3.4.) sei $\pi_2 : \eta \to \mathcal{H}$ die Projektion auf die 2. Komponente.

3.7. Definition:

Es sei $\eta(\underline{z},\underline{\lambda}) := \pi_2^{-1}(\mathcal{H}(\underline{z},\underline{\lambda}))$

Weiter bezeichnen wir die Menge der H-Extremalen in η mit genau p Verzweigungspunkten der Ordnungen $\lambda_1,\ldots,\lambda_p \in \mathbb{N}$ mit $\eta^\Delta := \pi_2^{-1}(\mathcal{H}^\Delta)$.

Die Einschränkung der Bündelprojektion π auf η^Δ wird mit $\pi^\Delta := \pi_{/\eta^\Delta}$ gekennzeichnet.

3.8. Lemma:

Sei $\underline{\lambda} \in \mathbb{N}^p$.
η^Δ ist C^1-Untermannigfaltigkeit von η der Kodimension $6|\lambda|-2p$.

Beweis:

Sei $(\alpha,f) \in \eta$ mit $f \in \mathcal{H}^\Delta$.
Die Projektion π_2 wird dazu benützt, die Struktur von

$\mathcal{H}^{\underline{\lambda}}$ auf η "zurückzuholen". Es ist $\pi_2^{-1}(\mathcal{H}^{\underline{\lambda}}) =: \eta^{\underline{\lambda}}$. Dann ist nämlich π_2 transversal zu $\mathcal{H}^{\underline{\lambda}}$, d.h. in (α,f):

$$T_f\mathcal{H}^{\underline{\lambda}} + \text{Bild } \pi_{2,*}(\alpha,f) = T_f\mathcal{H}$$

Denn: Bild $\pi_{2,*}(\alpha,f)$ liegt dicht in $T_f\mathcal{H}$ (Lemma 1.20.); daher können die endlich vielen Richtungen, die in $T_f\mathcal{H}^{\underline{\lambda}}$ nicht enthalten sind, in Bild $\pi_{2,*}$ nicht fehlen.

Mit Hilfe des Transversalitätslemmas ([2], Cor. 17.2.) folgt dann die Beh. □

3.2 Die H-Flächen in $\eta^{\underline{\lambda}}$

Wir möchten nun den Konformitätsoperator auf dem Bündel $\eta^{\underline{\lambda}}$ betrachten und dabei das Bild von K so wählen, daß $K_*(\alpha,f)$ surjektiv wird.

Dabei orientieren wir uns an folgender Beobachtung:

Ist $(\alpha,f) \in \eta(\underline{z},\underline{\lambda})$, $K(\alpha,f) = 0$ und $h \in T_f\mathcal{H}(\underline{z},\underline{\lambda})$, so hat $f_z \cdot h_z$ in z_k eine Nullstelle der Ordnung $2\lambda_k$!

3.9. Definition:

Sei $\underline{\lambda} \in \mathbb{N}^p$, $z_1,\dots,z_p \in B$ paarweise verschieden.

$$Y(\underline{z},2\underline{\lambda}) = \{\tilde{g} = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\, z^2\psi(z)_{/\partial B} \mid \psi \in H^{s-1}(B,\mathbb{C}) \text{ holomorph}$$

$$\text{und } \exists\ \psi_0 \text{ holomorph mit } \psi(z) = \prod_{k=1}^{p}(z-z_k)^{2\lambda_k}\,\psi_0(z)\}.$$

3.10. Lemma:

$Y(\underline{z},2\underline{\lambda})$ ist ein abgeschlossener linearer Unterraum von

$H^{s-1-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R})$ der Kodimension $4|\lambda|+3$. Es gilt:

$$Y(\underline{z},2\underline{\lambda}) \oplus J(\underline{z},2\underline{\lambda}) = H^{s-1-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R}) \qquad (3.2.1.)$$

Beweis:

Sei $\tilde{g} \in Y(\underline{z},2\underline{\lambda})$, dann sind die zugehörigen Ψ_o Lösungen von

$$\Psi_{o\bar{z}} = 0$$

$$-\frac{1}{2} \operatorname{Im} z^2 \prod_{k=1}^{p} (z-z_k)^{2\lambda_k} \Psi_o(z)/_{\partial B} = \tilde{g}$$

Nach [53], sec. 1.3 ist dies ein Riemann-Hilbert-Problem mit Index $4|\lambda|+4-1 = 4|\lambda|+3$ und hat höchstens eine Lösung. Daher die Kodimension $4|\lambda|+3$.

Dies ist aber gerade die Dimension von $J(\underline{z},2\underline{\lambda})$ (siehe Def. 2.24.). Um (3.2.1.) zu zeigen, genügt es,

$J(\underline{z},2\underline{\lambda}) \perp Y(\underline{z},2\underline{\lambda})$ nachzuweisen.

Sei also Ψ_o holomorph mit $-\frac{1}{2} \operatorname{Im} z^2 \prod_{k=1}^{p} (z-z_k)^{2\lambda_k} \Psi_o(z)/_{\partial B} = \tilde{g}$ und Φ erfülle die Bed. (2.2.5. - 2.2.7.) für $2\lambda_k$.

$$\tilde{h} := \operatorname{Im} \frac{\Phi(z)}{z}/_{\partial B}$$

Dann ist $\prod_{k=1}^{p} (z-z_k)^{2\lambda_k} \Psi_o(z)\, \Phi(z)$ holomorph auf $\bar{B}$ und somit

$$\oint_{\partial B} z^2 \prod (z-z_k)^{2\lambda_k} \Psi_o(z)\, \Phi(z)/_{z^2}\, dz = 0 .$$

Man rechnet leicht nach, daß der Imaginärteil dieses Intelgrals mit $-2\oint_{\partial B} \tilde{g}\tilde{h}\, ds$ übereinstimmt (vgl. 2.25.). □

Bevor wir das Bild von $K_{*|T_\eta^\lambda}$ beschreiben können, benötigen wir zur Vorbereitung das folgende Lemma:

3.11. Lemma:

Sei $\underline{\lambda} \in \mathbb{N}^p, (\alpha,f) \in \eta(\underline{z},\underline{\lambda})$, $K(\alpha,f) = 0$.
f_z sei von der Form $f_z(z) = \prod_{k=1}^{p} (z-z_k)^{\lambda_k} F(z)$

mit $F : \overline{B} \to \mathbb{C}^3$ und $F(z) \neq 0 \ \forall \ z \in \overline{B}$.

Setze $a_k := \operatorname{Re} F(z_k) \wedge \operatorname{Im} F(z_k)$, $k=1,\ldots,p$. Dann gibt es für beliebige $\underline{\ell} \in \mathbb{N}^p$, $0 \leq \ell_k \leq \lambda_k - 1$ ein $g \in T_f\mathcal{K}$ mit $g_z \cdot f_z = 0$ und der Darstellung

$$g_z(z) = \prod_{k=1}^{p} (z-z_k)^{\ell_k} G(z),$$

wobei

$$G(z_k) \cdot a_k \neq 0, \ k=1,\ldots,p .$$

(d.h. in Ker $K_*(\alpha,f)$ gibt es Lösungen, deren Normalkomponente von vorgeschriebener Ordnung verschwindet).

Beweis:

Wir können vorgehen wie im Beweis zu 3.5. .

Dazu lösen wir das Problem mit Hilfe des Ansatzes

$$g_z = \phi \, f_z + N \, t \quad \text{mit} \quad \phi, N : B \to \mathbb{C}$$

wie im Anhang, Lemma 5.4., durchgerechnet.

Mit den dortigen Bezeichnungen erhalten wir für ϕ und N das folgende System:

$$\phi_{\bar{z}} - \frac{d+ib}{\mu^2} N + H\bar{N} = 0$$

$$N_{\bar{z}} - \frac{1}{2} H\mu^2 \bar{\phi} = 0$$

Setzen wir $\psi := (b+id)\phi$, um Singularitäten von ϕ zu vermeiden, so erhalten wir:

$$\psi_{\bar{z}} - i \frac{b^2+d^2}{\mu^2} N + H(b+id)\bar{N} = 0$$

$$N_{\bar{z}} - \frac{1}{2} H \frac{\mu^2}{b-id} \bar{\psi} = 0$$

Jetzt besitzt die erste Gleichung L^∞-Koeffizienten (b,d und μ haben gleiches Nullstellenverhalten) und die zweite Koeffizienten mit einer λ_k-fachen Nullstelle in z_k.

Deswegen ist klar, daß sich mit Hilfe eines Ansatzes, analog dem im Beweis zu 3.5., eine schwache Lösung finden läßt. Dann liefert die Regularitätstheorie für die volle drei-dimensionale Gleichung die gewünschte Regularität. Die Kopplung der Gleichungen und das Nullstellenverhalten der Koeffizienten erlaubt gerade Lösungen N,ψ mit denselben vorgeschriebenen Nullstellen in z_k, so daß

$$g_z := \frac{\psi}{b+id} f_z + Nt$$ alle gestellten Forderungen erfüllt.

□

3.12. Satz:

Sei $\underline{\lambda} \in \mathbb{N}^p$, $(\alpha,f) \in n(\underline{z},\underline{\lambda})$, $K(\alpha,f) = 0$.

Dann ist

$$K_*(\alpha,f) : T_{(\alpha,f)}\, n(\underline{z},\underline{\lambda}) \to Y(\underline{z},2\underline{\lambda})$$

surjektiv.

Beweis:

Sei $\tilde{g} \in Y(\underline{z},2\underline{\lambda})$.

Lemma 3.10. besagt, daß das Komplement von $Y(\underline{z},2\underline{\lambda})$ gerade von $J(\underline{z},2\underline{\lambda})$ gebildet wird. Da $J(\underline{z},\underline{\lambda}) \subset J(\underline{z},2\underline{\lambda})$, existiert nach Satz 2.25 ein $(\gamma,h) \in T_{(\alpha,f)}\, n$ mit

$$K_*(\alpha,f)\,\langle \gamma,h \rangle = \tilde{g} \ .$$

Die Existenz dieses h folgt aus den $2|\lambda|+3$ Bedingungen von $J(\underline{z},\underline{\lambda})$; die verbleibenden $2|\lambda|$ Relationen müssen das Nullstellenverhalten von h bestimmen. Zunächst wissen wir nur, daß die holomorphe Fortsetzung ψ von $\tilde{g}$, für die $-\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\, z^2\, \psi(z)_{|\partial B} = \tilde{g}$ gilt, nach Definition 3.9. Nullstellen der Ordnung $2\lambda_k$ in z_k besitzt.

Da ψ mit $h_z \cdot f_z$ übereinstimmt, müssen wir von den Nullstellen von $h_z \cdot f_z$ auf diejenigen von h_z schließen. Dazu genügt eine lokale Betrachtung um z_k, wir setzen o.B.d.A. $z_k = 0$, $\lambda_k = \lambda$.

f_z habe die Entwicklung

$$f_z(z) = az^\lambda + \mathcal{O}(|z|^\lambda)$$

mit $a \in \mathbb{C}^3, \neq 0$, $a \cdot a = 0$.

Als Lösung der Gleichung

$$h_{z\bar{z}} = iH(f_{\bar{z}} \wedge h_z + h_{\bar{z}} \wedge f_z)$$

besitzt h_z die Entwicklung

$$h_z = \sum_{j=o}^{\lambda-1} b_j z^j + O(|z|^\lambda) .$$

In dieser allgemeinen Form können wir mit den verbliebenen $2|\lambda|$ Relationen nicht die $6|\lambda|$ Parameter der b_j zu Null diskutieren. Wir dürfen aber annehmen, daß es für jedes $b_j \in \mathbb{C}^3$ ein $\beta_j \in \mathbb{C}$ gibt mit $b_j = \beta_j \bar{a}$.

Denn: Offensichtlich ist das gefundene h nur bis auf Abbildungen aus Ker $K_*(\alpha, f)$ bestimmt. In Ker $K_*(\alpha, f)$ gibt es aber Lösungen, die in z_k von vorgeschriebener Ordnung verschwinden und die linear unabhängigen Richtungen a bzw. $a^\perp := \mathrm{Re}\, a \wedge \mathrm{Im}\, a$ besitzen. Die eine Schar bilden die erzwungenen Jacobifelder, die andere die Lösungen aus Lemma 3.11. Die erzwungenen Jacobifelder sind nämlich von der Form

$$g = \frac{\varphi}{z^\ell} f_z + \frac{\bar{\varphi}}{z^\ell} f_{\bar{z}} \quad \text{mit holomorphem } \phi, \varphi(0) \neq 0, \quad 0 \leq \ell \leq \lambda$$

$$\Rightarrow \quad g_z = (\lambda - \ell) a z^{\lambda-\ell-1} + O(|z|^{\lambda-\ell}) .$$

Daher kann man o.B.d.A. annehmen, daß

$$h_z = \bar{a} \cdot \sum_{j=o}^{\lambda-1} \beta_j z^j + O(|z|^\lambda)$$

Wegen

$$O = f_z \cdot h_z = a \cdot \bar{a} \sum_{j=o}^{\lambda-1} \beta_j z^{\lambda+j} + \bar{a} \sum_{j=o}^{\lambda-1} \beta_j z^j \cdot O(|z|^\lambda) + O(|z|^{2\lambda})$$

folgt sukzessiv $\beta_o = \beta_1 = \ldots = \beta_{\lambda-1} = 0$, was zu beweisen war. □

In diesem Satz wurde nur der Fall festgehaltener Verzweigungspunkte betrachtet. Den variablen Fall führen wir darauf zurück, indem wir den Konformitätsoperator lokal leicht modifizieren.

Aus Lemma 3.6. wissen wir, daß die Zuordnung für $f \in \eta^{\underline{\lambda}} \to (z_1,\ldots,z_p) \in B^p$ auf die Verzweigungspunkte differenzierbar ist.

3.13. Definition:

Sei $f_o \in \eta(\underline{z}_o, \underline{\lambda}) \subset \eta^{\underline{\lambda}}$.
Wir definieren die Abbildung

$$P : \eta^{\underline{\lambda}} \to \mathbb{C}[z]$$

$$P(f)(z) := \prod_{k=1}^{p} (z-z_k)^{\lambda_k}, \text{ falls } f \in \eta(\underline{z},\underline{\lambda}) \subset \eta^{\underline{\lambda}}$$

und den modifizierten Konformitätsoperator:

$$\hat{K} : \eta^{\underline{\lambda}} \to Y(\underline{z}_o, 2\underline{\lambda})$$

durch

$$\tilde{K}(\alpha,f) := -\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\, z^2\,\frac{P^2(f_o)}{P^2(f)}\,f_z\cdot f_z\,/_{\partial B}$$

3.14. Lemma:

$\tilde{K}$ ist stetig differenzierbar und:

$$\tilde{K}(\alpha,f)\equiv 0 \Leftrightarrow K(\alpha,f)\equiv 0 \quad \forall\ (\alpha,f)\in \eta^{\lambda}$$

Ist $\tilde{K}(\alpha,f)\equiv 0$, so gilt

$$\forall\ (\gamma,h)\in T_{(\alpha,f)}\eta^{\lambda}\ :\ K_*(\alpha,f)\,\langle\gamma,h\rangle = -\frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\, z^2\,\frac{P^2(f_o)}{P(f)}\,f_z\cdot h_z$$

Beweis:

Die Differenzierbarkeit ist klar; weiter gilt:

$$z^2 f_z\cdot f_z\equiv 0 \ \Leftrightarrow\ z^2\,\frac{P^2(f_o)}{P^2(f)}\,f_z\cdot f_z\equiv 0$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$$\mathrm{Im}\, z^2 f_z\cdot f_z\equiv 0 \qquad \mathrm{Im}\, z^2\,\frac{P^2(f_o)}{P^2(f)}\,f_z\cdot f_z\equiv 0$$

An den Nullstellen von $\tilde{K}$ ist also $f_z\cdot f_z = 0$, was zur Folge hat, daß in der Formel für $\tilde{K}_*$ der Term mit der Ableitung von P wegfällt. □

Damit sind wir in der Lage, unser erstes Hauptergebnis über die Struktur der H-Flächen in η zu formulieren und zu beweisen.

3.15. Satz:

$K^{-1}(0)\cap \eta^{\lambda}$ ist C^1-Untermannigfaltigkeit von η^{λ}.

Beweis:

Sei $(\alpha,f_o) \in \eta(\underline{z}_o,\underline{\lambda})$ mit $K(\alpha,f_o) \equiv 0$, dann gilt nach Lemma 3.14.

$$K(\alpha,f) = 0 \Leftrightarrow \tilde{K}(\alpha,f) = 0 \quad \forall \ (\alpha,f) \in \eta^{\lambda}$$

und es ist

$$\tilde{K}_*(\alpha,f_o) = K_*(\alpha,f_o)$$

d.h. insbesondere, daß $\tilde{K}_*(\alpha,f_o)$ surjektiv ist. Daher bildet die Nullstellenmenge von $\tilde{K}$ bzw. K in Umgebung von (α,f_o) eine C^1-Untermannigfaltigkeit von η^{λ}, diffeomorph zu Ker $\tilde{K}_*(\alpha,f_o)$. □

3.3. Der Indexsatz

Wir setzen nun $N := K^{-1}(0) \cap \eta^{\lambda}$ und π/N bezeichne die Restriktion der Bündelprojektion π^{λ} auf N.

Ist $(\alpha,f) \in N$, so gilt offenbar:

$$\text{Ker } \pi/N_*(\alpha,f) = \text{Ker } \pi^{\lambda}_*(\alpha,f) \cap \text{Ker } K_*(\alpha,f)$$

$$\text{Bild } \pi/N_*(\alpha,f) = \pi^{\perp}_*(\alpha,f)\,\langle \text{Ker } K_*(\alpha,f)\rangle$$

Kern und Bild von π/N_* entsprechen daher der Zerlegung von Ker K_* in Horizontal- und Vertikalkomponenten im Bündel η^{λ}. Wir besitzen zwar nicht genug Information, um die Dimensionen und Kodimensionen dieser Räume direkt zu berechnen, jedoch gelingt es, ihr Verhältnis zueinander

zu bestimmen, analytisch ausgedrückt durch den Fredholmindex. Da wir wissen, daß $N \subset \Pi^{-1}(0)$ eine Untermannigfaltigkeit bildet, brauchen wir nur den linearisierten Fall zu betrachten.

Wir stützen uns dabei auf den folgenden Satz:

3.16. Satz: (Böhme/Tromba [15], Th. 3.37)

Seien X,Y,Z Hilberträume und folgende Abbildungen gegeben:

(i) $F : X \times Y \to \mathbb{R}^n$ stetig, linear, surjektiv

(ii) $\pi : X \times Y \to X$ stetige lineare Projektion auf den ersten Faktor

(iii) $K : X \times Y \to Z$ stetig linear, wobei $K/X \times \{0\}$ Fredholmsch vom Index m und $K/\operatorname{Ker} F$ surjektiv.

Dann ist

$$\pi : \operatorname{Ker} K \cap \operatorname{Ker} F \to X \quad \text{Fredholmsch vom Index } m-n$$

Beweis:

Der Beweis besteht aus einer Reihe von direkten Zerlegungen der gegebenen Räume unter geschickter Ausnützung der geforderten Eigenschaften, nachzulesen in [15], 3.34-3.37. Wir möchten auf einen Druckfehler in der Formulierung von Th. 3.37., [15] hinweisen, der eventuell Verwirrung stiftet: K muß auf Ker F surjektiv sein (in der dortigen Formulierung : K_* auf $M := \operatorname{Ker} f_*$ surjektiv). □

Um die Anwendung anzudeuten, haben wir in Satz 3.16. bereits die Buchstaben K,π verwendet; die Abbildung F steht für die Einschränkung von n auf $n^{\underline{\lambda}}$.

3.17. Satz:

Sei $\underline{\lambda} \in \mathbb{N}^p$, dann ist

$$\pi/N : K^{-1}(0) \cap n^{\underline{\lambda}} \to \mathcal{A}$$

ein nichtlinearer Fredholm-Operator vom Index

$$-2|\lambda| + 2p + 3 .$$

Beweis:

Wie wir wissen, bildet $K^{-1}(0) \cap n^{\underline{\lambda}}$ eine Untermannigfaltigkeit von $n^{\underline{\lambda}}$. Es genügt also, den linearisierten Fall zu betrachten.

Sei $(a,f) \in n(\underline{z},\underline{\lambda})$; $K(a,f) = 0$.
$T_{(a,f)} n^{\underline{\lambda}}$ wird durch den Kern einer linearen surjektiven Abbildung $F : T_{(a,f)} n \to \mathbb{R}^n$, $n = 6|\lambda| - 2p$, beschrieben.
$K_*(a,f) : T_f n(a) \to H^{s-1-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R})$ hat Index 0, die lineare Projektion $P : H^{s-1-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R}) \to Y(\underline{z},2\underline{\lambda})$ hat Index $4|\lambda|+3$, entsprechend der Kodimension von $Y(\underline{z},2\underline{\lambda})$ in $H^{s-1-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R})$.

Somit ist $P\, K_*(a,f) : T_f n(a) \to Y(\underline{z},2\underline{\lambda})$ Fredholmsch vom Index $4|\lambda|+3$.
Nach Satz 3.16. ist dann

$$\pi_*(a,f) : \mathrm{Ker}\ P\, K_*(a,f) \cap \mathrm{Ker}\ F \to T_a \mathcal{A}$$

Fredholmsch vom Index $4|\lambda|+3-(6|\lambda|-2p) = -2|\lambda|+2p+3$.

Weiter ist $\operatorname{Ker} K_*(\alpha,f) \cap \operatorname{Ker} F \subset \operatorname{Ker} P\, K_*(\alpha,f) \cap \operatorname{Ker} F$;

umgekehrt folgt aus $(\gamma,h) \in \operatorname{Ker} F$, daß

$$K_*(\alpha,f)\,\langle \gamma,h\rangle \in Y(\underline{z},2\underline{\lambda})$$

und somit $P\, K_*(\alpha,f)\,\langle \gamma,h\rangle = K_*(\alpha,f)\,\langle \gamma,h\rangle$.

Daher:

$$\pi_*(\alpha,f) : \operatorname{Ker} K_*(\alpha,f) \subset T_{(\alpha,f)}\mathcal{M}^{\lambda} \to T_\alpha \mathcal{A}$$

Fredholmsch vom Index $-2|\lambda| + 2p + 3$. □

Kap. IV Anwendung: Konstruktion vieler Lösungen

Wir wollen in diesem Kapitel zeigen, in welcher Weise man die gewonnenen Ergebnisse anwenden kann. Wir betrachten eine Schar von Kugelschalen, die durch die Einheitskreislinie berandet werden und sich nur durch ihre Parametrisierung unterscheiden. Es handelt sich also bez. η um eine "vertikale" Familie von H-Flächen. Dabei werden die Parametrisierungen so gewählt, daß die Randkurve zweimal durchlaufen wird und somit ein (innerer) Verzweigungspunkt der Ordnung 1 entsteht. Zur Normalisierung bzw. der konformen Gruppe werden drei Bedingungen im Innern gestellt, die nicht mit der üblichen Drei-Punkte-Bedingung übereinstimmen, aber auch die Bündelprojektion injektiv machen. Durch jeden Punkt der vertikalen Familie legen wir transversal dazu eine Mannigfaltigkeit von H-Flächen, die denselben Normalisierungsbedingungen genügen. Das hat zur Folge, daß für verschiedene Parameterwerte τ die H-Flächen in den "horizontalen Schichten" nicht konform äquivalent sein können.

Sodann läßt sich das (endlich dimensionale) Kobild der Bündelprojektion für jeden Scharparameter τ explizit bestimmen, was in jeder Schicht Richtungen angibt, in die

man nicht stören darf. Findet sich für diese Kobilder jeweils eine Basis, so daß die Basisvektoren (in Abhängigkeit von τ) eine sog. "unendlichdimensionale Familie" bilden, dann kann man bel. viele Parameterwerte auswählen mit der Eigenschaft, daß sich die zugehörigen Kobilder transversal schneiden. Damit besitzt der Durchschnitt der Bilder für die ausgewählten Parameter die Mannigfaltigkeitseigenschaft: Man findet in allen ausgewählten Schichten eine gemeinsam zulässige Richtung und durch Störung der zweimal durchlaufenen Kreislinie eine Randkurve, die in allen Schichten ein Urbild besitzt. Man hat also eine Randkurve konstruiert, die eine beliebig vorgegebene Anzahl von konform nicht äquivalenten H-Flächen berandet. Die Idee zu dieser Konstruktion, bei der man sich durch das Einführen von Verzweigungspunkten geeignete Freiheitsgrade verschafft, geht auf Böhme [12] zurück.

4.1. Definition:

(i) Sei $\sigma \in \mathbb{R}_+$, $H := \frac{2\sigma}{1+\sigma^2} < \frac{1}{2}$ fest gewählt.

Mit $\tilde{f} : B \to \mathbb{R}^3$ bezeichnen wir die Abbildung, definiert durch

$$\tilde{f}(x,y) := \begin{pmatrix} \frac{(1+\sigma^2)x}{1+\sigma^2(x^2+y^2)} \\ \frac{(1+\sigma^2)y}{1+\sigma^2(x^2+y^2)} \\ \frac{\sigma(x^2+y^2-1)}{1+\sigma^2(x^2+y^2)} \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \tilde{f}(z) = \begin{pmatrix} \frac{(1+\sigma^2)\,\mathrm{Re}\,z}{1+\sigma^2|z|^2} \\ \frac{(1+\sigma^2)\,\mathrm{Im}\,z}{1+\sigma^2|z|^2} \\ \frac{\sigma(|z|^2-1)}{1+\sigma^2|z|^2} \end{pmatrix}$$

(ii) Weiter sei $q : B \times]-1,1[\to \mathbb{C}$ definiert durch

$$q(z,\tau) := \frac{z^2-\tau^2}{1-\tau^2 z^2}$$

(iii) Für alle $\tau \in]-1,1[$ sei $f_\tau : B \to \mathbb{R}^3$ die Abbildung

$$f_\tau := \tilde{f} \circ q(\cdot;\tau)$$

4.2. Lemma:

Für jedes $\sigma \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$, ist f eine (konform-parametrisierte) H-Fläche mit $H = \frac{2\sigma}{1+\sigma^2}$ und

$$\tilde{f}(x,y) = (x,y,0) \quad \forall \ (x,y) \in \partial B$$

Beweis:

Es handelt sich um das Beispiel von Heinz in [21]. □

4.3. Bemerkung:

$\tilde{f}$ stellt die auf Seite 12 erwähnte Darstellung der Kugelschalen mit Radius $R = \frac{1}{H}$ mittels stereographischer Projektion dar.

4.4. Lemma:

(i) Für alle $\tau \in]-1,1[$ ist $q(\cdot;\tau)$ eine holomorphe Abbildung des Einheitskreises auf sich, so daß ∂B gerade auf eine zweimal durchlaufene Kreislinie abgebildet wird.

(ii) Für alle $\tau \in]-1,1[$ hat $q(\cdot;\tau)$ genau einen Verzweigungspunkt der Ordnung 1 in $z = 0$.

(iii) Falls $\tau_1 \neq \tau_2$, dann gibt es keinen Automorphismus ϕ des Einheitskreises, so daß

$$q(\phi(z),\tau_1) = q(z,\tau_2) \quad \forall\ z \in \bar{B} .$$

Beweis:

Siehe [12], 1.4 . □

4.5. Korollar:

Für alle $\tau \in]-1,1[$ stellt f_τ eine H-Fläche dar mit genau einem Verzweigungspunkt der Ordnung 1 in $z = 0$, berandet von einer zweimal durchlaufenen Einheitskreislinie. Es ist $f_0(z) = \tilde{f}(z^2)$ $\forall\ z \in \bar{B}$, insbesondere

$$\text{ist } f_0(e^{i\phi}) = (\cos 2\phi,\ \sin 2\phi,\ 0) .$$

Wir wissen, daß $\phi \to q(e^{i\phi};\tau)$ eine Immersion in die zweimal durchlaufene Kreislinie darstellt.
Deshalb können wir für jedes $\tau \in]-1,1[$ eine stetige Immersion $\xi(\cdot;\tau) : [0,2\pi[\to \mathbb{R}$ wählen mit:

$$q(e^{i\phi};\tau) = \frac{e^{2i\phi}-\tau^2}{1-\tau^2 e^{2i\phi}} = e^{i\xi(\phi;\tau)} \quad \forall\ \phi \in [0,2\pi[\tag{4.1.1.}$$

und $\xi(0;\tau) = 0$.

Dann ist aber auch folgendes klar:

4.6. Lemma:

Für jedes $\tau \in]-1,1[$ gibt es eine bijektive stetige Funktion $\zeta(\cdot;\tau) : [0,2\pi[\to [0,2\pi[$, so daß

$$e^{i\Phi} \to e^{i\zeta(\Phi;\tau)}$$

einen Diffeomorphismus von $\partial B \to \partial B$ darstellt mit der Eigenschaft

$$q(e^{i\zeta(\Phi;\tau)};\tau) = e^{2i\Phi} \qquad (4.1.2.)$$

$$\forall\ \Phi \in [0,2\pi[$$

bzw.

$$\xi(\zeta(\Phi;\tau);\tau) = 2\Phi$$

Beweis: siehe [12], 1.6, 1.8 □

4.7. Definition:

Wir setzen $\alpha_\tau : \partial B \to \mathbb{R}^3$

$$\alpha_\tau(\Phi) := (\cos\,\xi(\Phi;\tau),\ \sin\,\xi(\Phi;\tau),0) \quad \text{für } \tau \in]-1,1[\ .$$

Dann definieren wir für ein $s \geq 5$:

$$\mathcal{O}_o := \{\alpha \in H^{s+2-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R}^3) \mid \alpha \text{ Immersion in Umgebung von } \alpha_o\}$$

und das Bündel $\eta_o := \bigcup_{\alpha\in\mathcal{O}_o} (\alpha, \eta(\alpha))$ mit der Projektion $\pi : \eta_o \to \mathcal{O}_o$.

(Offenbar gibt es ein $\varepsilon > 0$, so daß für $\tau \in]-\varepsilon,\varepsilon[$ die Familie (f_τ) zu η_o gehört; setze $I :=]-\varepsilon,\varepsilon[$).

Für $\tau \in I$ habe f_τ die Entwicklung

$$f_{\tau,z}(z) = a_\tau z + \mathcal{O}(|z|).$$

mit $a_\tau \in \mathbb{C}^3$, $\neq 0$, $a_\tau \cdot a_\tau = 0$.

Es sei

$$N_\tau := \{ (\alpha,f) \in \eta_o \mid K(\alpha,f) \equiv 0,\ f_z(0) = 0,\ f_z(z) \neq 0 \text{ sonst};$$

$$f(o) = f_\tau(o),\ \operatorname{Im} f_{zz}(o)\cdot \bar{a}_\tau = \operatorname{Im} f_{\tau,zz}(o)\cdot \bar{a}_\tau \}$$

d.h. N_τ ist die Menge der H-Flächen im Bündel η_o mit genau einem Verzweigungspunkt der Ordnung 1 in $z = 0$, normiert auf Funktionswerte der Familie f_τ.

4.8. Bemerkung:

Da wir von gegebenen H-Flächen ausgehen, spielt es - wie in 1.17. erwähnt - für die Strukturen in η_o keine Rolle, daß wir die Forderung der Injektivität in $\mathfrak{A}_o$ fallenlassen.

4.9. Lemma:

Für $\tau \in I$ ist N_τ Untermannigfaltigkeit von $\eta_o \cap \eta(0,1)$ (d.h. Verzweigungspunkt in 0 der Ordnung 1) und insbesondere Untermannigfaltigkeit der H-Flächen in $\eta_o \cap \eta(0,1)$ der Kodimension 4.

Für $\tau_1, \tau_2 \in I$, $\tau_1 \neq \tau_2$ ist $N_{\tau_1} \cap N_{\tau_2} = \emptyset$ und die H-Flächen in N_{τ_1} und N_{τ_2} sind nicht konform äquivalent.

Beweis:

Der erste Teil ist eine direkte Folge unserer Untersuchungen in den vorausgegangenen Kapiteln. Die Kodimension 4 entsteht durch die zusätzlichen Normalisierungsbedingungen.

$$\tau \to f_\tau(o) = \tilde{f}(-\tau^2) = \begin{pmatrix} \frac{-(1+\sigma^2)\tau^2}{1+\sigma^2\tau^4} \\ 0 \\ \frac{-(1-\tau^4)\sigma}{1+\sigma^2\tau^4} \end{pmatrix}$$

ist in Umgebung von $\tau = o$ injektiv, woraus $N_{\tau_1} \cap N_{\tau_2} = \emptyset$ folgt.

Gäbe es einen konformen Automorphismus des Einheitskreises, der eine H-Fläche in N_{τ_1} in eine H-Fläche von N_{τ_2} überführt, so würde entweder der Verzweigungspunkt aus dem Punkt $z = 0$ bewegt oder durch Drehung die Normalisierungsbedingung verletzt. Beides liefert Widersprüche zur Definition von $N_{\tau_{1,2}}$. □

4.10. Lemma:

Für $\tau \in I$ und $(\alpha, f) \in N_\tau$ gilt:

$$(\gamma, h) \in T_{(\alpha,f)} N_\tau \Leftrightarrow (\gamma, h) \in \operatorname{Ker} K_*(\alpha, f)$$

$$\text{und: } h(0) = 0$$

$$h_z(o) = 0$$

$$\operatorname{Im} h_{zz}(0) \cdot \bar{a}_\tau = 0$$

Setzt man $h = 2\operatorname{Re} \Phi \frac{f_z}{z} + N\, t$ (gemäß Lemma 5.3), so sind die obigen Normalisierungsbedingungen äquivalent zu:

$$\Phi(0) = \Phi_z(0) = 0 \,, \quad \operatorname{Im} \Phi_{zz}(o) = 0 \,,$$

$$N(0) = N_z(o) = 0$$

Beweis:

Der erste Teil der Aussage ist klar, der zweite Teil folgt durch Nachrechnen aus dem Ansatz unter Berücksichtigung der Beziehung $f_z \cdot h_z \equiv 0$.

□

4.11.Satz:

Für $\tau \in I$ ist die Einschränkung der Bündelprojektion

$$\pi_\tau := \pi_{/N_\tau} : N_\tau \to \mathcal{O}_0$$

Fredholmsch vom Index -3 .

Beweis:

Anwendung von Satz 3.16. auf die Situation von Lemma 4.9. liefert die Fredholmeigenschaft von $\pi_{\tau,*}$ mit Index $7-10=-3$ Dabei entspricht 7 der Kodimension von $Y(0,2)$ $= K_*(\alpha,f) \langle T_{(\alpha,f)} \cap (0,1) \rangle$ in $H^{s-1-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R})$ und 10 der Anzahl der linear unabhängigen Bedingungen.

4.12. Lemma:

Für alle $\tau \in I$ enthält

$T_{f_\tau} \cap (\alpha_0) \cap \operatorname{Ker} K_*(\alpha_0, f_\tau)$ nur die erzwungenen Jacobifelder zu f_τ.

Beweis:

Wir können gemäß Lemma 5.3. ein $h \in T_{f_\tau} \pi(\alpha_o) \cap \operatorname{Ker} K_*(\alpha_o, f_\tau)$ ansetzen als:

$$h := 2 \operatorname{Re} \phi \frac{f_{\bar{z}}}{z} + N t_\tau$$

mit $\phi : \overline{B} \to \mathbb{C}$, $N : \overline{B} \to \mathbb{R}$ und den Randbedingungen

$$\operatorname{Re} \frac{\phi(z)}{z^2} = 0 \text{ für } z \in \partial B$$

bzw. $N/_{\partial B} = 0$.

Wir werden zeigen, daß im Spezialfall $\tau = 0$ daraus $N \equiv 0$ auf $\overline{B}$ folgt.

Dieser Schluß bleibt dann in einer genügend kleinen Umgebung I von $\tau = 0$ richtig.

Im Fall $\tau = 0$ erfüllt N die Gleichung aus 5.3.:

$$\Delta N + 2\mu_o^2 (2H^2 - \kappa) N = 0$$

$$N/_{\partial B} = 0$$

mit $\mu_o(z) := 2 \left| \frac{\partial}{\partial z} f_o(z) \right|$

$$= 2 \left| \tilde{f}_z(z^2) 2z \right|$$

$$= \frac{2r\,(1+\sigma^2)}{1+\sigma^2 r^4}$$

Für f_o ist $2H^2 - \kappa = H^2 = \frac{4\sigma^2}{(1+\sigma^2)^2}$, so daß die radialsymmetrische Gleichung insgesamt lautet:

$$\Delta N + \frac{32\,\sigma^2 r^2}{(1+\sigma^2 r^4)^2}\, N = 0$$

$$N/_{\partial B} = 0$$

Die Eindeutigkeit ist gewährleistet, solange

$$\sup_{0 \leq r \leq 1} \frac{32\sigma^2 r^2}{(1+\sigma^2 r^4)^2} < \lambda_1 ,$$

wobei λ_1 den ersten Eigenwert von $-\Delta$ auf B mit Randbedingungen = 0 darstellt.

Es ist bekannt, daß λ_1 gleich dem Quadrat der 1. Nullstelle j_0 der 0-ten Besselfunktion ist ($j_0 \approx 2{,}405$).

Wegen $\frac{r}{1+\sigma^2 r^4} \leq \frac{3}{4} \left(\frac{1}{3\sigma^2}\right)^{\frac{1}{4}}$

gilt $\sup \frac{32\sigma^2 r^2}{(1+\sigma^2 r^4)^2} \leq 32\sigma^2 \frac{9}{16\sqrt{3}\,\sigma} < j_0^2$ für $\|f_0\|_\infty |H| < \frac{1}{2}$

(damit $0 < \sigma < 2-\sqrt{3}$)

Deshalb folgt $N = 0$.

□

Wir unterscheiden im folgenden die Funktionen

$$\tilde{\mu}(z) := 2|\hat{f}_z(z)| = \tilde{\mu}(r) = \frac{1+\sigma^2}{1+\sigma^2 r^2}$$

und für $\tau \in]-1,1[$:

$$\mu_\tau(z) := 2|f_{\tau,z}(z)|$$

Das Ziel ist, die Randwerte derjenigen Lösungen von

$$\Delta N + 2\mu_\tau^2(2H^2-\kappa)N = 0$$

explizit (in Abhängigkeit von τ) zu charakterisieren, die

$$N_z(0) \neq 0 \neq N(0)$$

erfüllen.

Die Lösung dieser nicht radial-symmetrischen Gleichung gelingt mit Hilfe des folgenden Lemmas:

4.13 Lemma:

(i) Ist u holomorph, $\int u$ eine Stammfunktion von u, so ist die Funktion v

$$v := u - \frac{2\sigma^2|z|^2}{1+\sigma^2|z|^2} \frac{1}{z} \int u$$

eine Lösung von

$$\Delta v + 2\tilde{\mu}^2(2H^2-\kappa)v = 0 \qquad (4.1.3.)$$

(ii) Ist v Lösung von (4.1.3.), so ist

$v_\tau := v \circ q(\cdot;\tau)$ Lösung von

$$\Delta v_\tau + 2\mu_\tau^2(2H^2-\kappa)v_\tau = 0 \qquad (4.1.4.)$$

(Beachte: $2H^2-\kappa = H^2 = \frac{4\sigma^2}{(1+\sigma^2)^2} = \text{const.}$)

Beweis:

Zu (i): Setze $v = u - \frac{2\sigma^2\bar{z}}{1+\sigma^2|z|^2} \int u$,

dann ist $v_z = u_z - \frac{2\sigma^2\bar{z}}{1+\sigma^2|z|^2} u + \frac{2\sigma^4\bar{z}^2}{(1+\sigma^2|z|^2)^2} \int u$

und $v_{z\bar{z}} = -\frac{1}{(1+\sigma^2|z|^2)^2}u + \frac{4\sigma^4\bar{z}}{(1+\sigma^2|z|^2)^2}\int u - \frac{4\sigma^6|z|^2\bar{z}}{(1+\sigma^2|z|^2)^3}\int u$.

Durch Einsetzen folgt die Behauptung.

Zu (ii): Mit $v_\tau = v \circ q$ ist

$$(v \circ q)_{z\bar{z}} = v_{z\bar{z}} \circ q \ |q_z|^2$$

Derselbe Faktor entsteht aber auch bei der Umrechnung von μ_τ in $\tilde{\mu}$, so daß man

$$v_{z\bar{z}} \circ q + \frac{1}{2}\tilde{\mu}^2 \circ q(2H^2-\kappa)v \circ q \equiv 0 \quad \text{erhält.} \qquad \square$$

Es kommt nun darauf an, ein vollständiges System von Basislösungen für Gleichung (4.1.4.) zu konstruieren. Die radialsymmetrische Gleichung (4.1.3.) läßt sich mit Hilfe von Lemma 4.13(i) explizit lösen.

Würden wir von dem System $\{z^n, z^{-n}\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ausgehen und das quadratische q einsetzen, erhielten wir nur Lösungen mit geradem Nullstellenverhalten, das nicht vollständig sein kann. Wir müssen also von einem System ausgehen, das Quadratwurzeln enthält. Das erzeugt aber die Schwierigkeit, daß $\sqrt{q}$ auf $\bar{B}$ nicht wohldefiniert ist. Hingegen ist

$$\sqrt{q+\tau^2} = \sqrt{\frac{z^2-\tau^2}{1-\tau^2z^2} + \tau^2} = z\sqrt{\frac{1-\tau^4}{1-\tau^2z^2}}$$

auf ganz $\bar{B}$ erklärbar.

Also:

Für $k \in \mathbb{N}$ ist

$$(z+\tau^2)^{k/2} \text{ holomorph für } |z| < \tau^2 .$$

Somit ist $(z+\tau^2)^{k/2} - \frac{2\sigma^2|z|^2}{1+\sigma^2|z|^2} \frac{2}{z(k+2)} (z+\tau^2)^{k/2} + 1$

die entsprechende (lokale) Lösung von (4.1.3.).

Wir setzen für $k \in \mathbb{N}_0$, $\tau \in I$:

$$v_k(z;\tau) = (q+\tau^2)^{k/2} \{1 - \frac{2\sigma^2\bar{q}}{1+\sigma^2|q|^2} \frac{2}{k+2} (q+\tau^2)\}$$

$$= z^k \left(\frac{1-\tau^4}{1-\tau^2 z^2}\right)^{k/2} \{1 - \frac{4}{k+2} \frac{\sigma^2|q|^2}{1+\sigma^2|q|^2} \frac{z^2(1-\tau^4)}{z^2-\tau^2}\}$$

Dann ist das System $\{v_0(\cdot;\tau), v_k(\cdot;\tau), \bar{v}_k(\cdot;\tau)\}_{k\in\mathbb{N}}$ in Umgebung von $\tau=0$ ein vollständiges System von Lösungen von (4.1.4.), das wir orthogonalisieren können (bez. $L^2(\partial B)$).

Für $z=e^{i\varphi}$ ist $|q(z)| = 1$; insbesondere ist

$$v_1(e^{i\varphi},\tau) = z\left(\frac{1-\tau^4}{1-\tau^2 z^2}\right)^{1/2} \{1 - \frac{4}{3} \frac{\sigma^2}{1+\sigma^2} (1-\tau^4) \frac{z^2}{z^2-\tau^2}\}$$

4.1.4. Lemma:

Sei $g \in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R})$.

Dann hat die Lösung von $\Delta N + 2\nu_\tau^2(2H^2-\kappa)N = 0$, $N/_{\partial B} = g$ die Eigenschaft $N(0) = N_z(0) = 0$ genau dann, wenn

$$\oint_{\partial B} g \, \mathrm{Re}\, v_0(\cdot;\tau) ds = 0$$

$$\oint_{\partial B} g \, \mathrm{Re}\, v_1(\cdot;\tau) ds = 0 \qquad \oint_{\partial B} g \, \mathrm{Im}\, v_1(\cdot;\tau)\, ds = 0$$

Beweis:

Folgt aus der Darstellung von N über die Randwerte. □

4.15. Lemma:

Sei $\tau \in I$ und $g_1, g_2 \in H^{s-\frac{1}{2}}(\partial B, \mathbb{R})$. Dann gilt:

Es gibt Lösungen von $(\frac{\Phi}{z})_{\bar{z}} = \frac{d_\tau + ib_\tau}{\mu_\tau} N$

$$\Delta N + 2\mu_\tau^2 (2H^2 - \kappa) N = 0$$

mit Randwerten $\operatorname{Re} \frac{\Phi(z)}{z^2}\Big/_{\partial B} = g_1$

$$N\Big/_{\partial B} = g_2$$

(entsprechend dem System, das zu f_τ gehört und aus dem Ansatz $h = 2 \operatorname{Re} \Phi \frac{f_{\tau,z}}{z} + N\, t_\tau$ folgt, vgl. Lemma 5.3.)

genau dann, wenn

$$\oint_{\partial B} g_2 \operatorname{Re} v_0(\cdot,\tau)\, ds = 0$$

$$\oint_{\partial B} g_2 \operatorname{Re} v_1(\cdot;\tau)\, ds = 0$$

$$\oint_{\partial B} g_2 \operatorname{Im} v_1(\cdot;\tau)\, ds = 0$$

Beweis:

Wir spalten das System gemäß den Randbedingungen auf in:

(i) $\operatorname{Re} \frac{\Phi(z)}{z^2}\Big/_{\partial B} = g_1$ (ii) $\operatorname{Re} \frac{\Phi(z)}{z^2}\Big/_{\partial B} = 0$

$N\Big/_{\partial B} = 0$ $N\Big/_{\partial B} = g_2$

Im Fall (i) wissen wir, daß $N \equiv 0$. Es bleibt das Riemann-Hilbert-Problem

$$\Phi_{\bar{z}} = 0, \quad \mathrm{Re}\, \frac{\Phi(z)}{z^2}\Big|_{\partial B} = g_1$$

zu lösen in der Form $\Phi(z) = z^2 \Psi(z)$ mit holomorphem Ψ. Ψ erfüllt dann die Randbedingung

$$\mathrm{Re}\ \Psi(z)\Big|_{\partial B} = g_1 ,$$

was ein Riemann-Hilbert-Problem der Charakteristik 0 und damit Index $1 - 0 = 1$ darstellt. Deshalb kann man

$$\mathrm{Im}\ \Psi(0) = \mathrm{Im}\ \Phi_{zz}(0) = 0$$

frei wählen (siehe [53], 1.2.).

ImFall (ii) können wir Lemma 4.14. anwenden und erhalten eine Lösung N mit $N(0) = N_z(0) = 0$. Zu diesem N bestimmen wir das zugehörige Φ aus der zweiten Gleichung. Wir finden ein Φ von der Form $\Phi(z) = z^2 \Psi(z)$, weil die rechte Seite der Gleichung

$$\Psi_{\bar{z}} = \frac{b_\tau + i d_\tau}{\mu_\tau} \frac{1}{z} N$$

noch in L^∞ ist. □

Statt der Bündelprojektion π betrachten wir nun für $\tau \in I$ die Projektion

$$P_\tau : \eta_0 \to E_\tau$$

auf das Normalenbündel E_τ von α_τ (siehe 4.7.)

also:

$$P_\tau(\alpha,f) := \alpha \circ \xi - \alpha_\tau - (\alpha \circ \xi - \alpha_\tau) \cdot t_1 \circ \xi \; t_1 \circ \xi$$

mit $t_1(\phi) := (-\sin \phi, \cos \phi, 0)$, dem tangentialen Einheitsvektor. P_τ ist stetig differenzierbar mit

$$P_{\tau,*}(\alpha,f)\langle \gamma,h \rangle = \gamma \circ \xi - (\gamma \circ \xi \cdot t_1 \circ \xi) t_1 \circ \xi$$

Außerdem verhält sich diese Projektion ganz ähnlich wie die Bündelprojektion π, hat aber den Vorteil, daß im Bild die unerwünschten tangentialen Richtungen, die nur von Umparametrisierungen erzeugt werden, herausfallen.

4.16. Satz:

Für jedes $\tau \in I$ ist die Einschränkung

$$P_{\tau/N_\tau} : N_\tau \to E_\tau$$

Fredholmsch vom Index -3.

Ist $(\alpha_0,f_\tau) \in N_\tau$, so ist $P_{\tau,*}(\alpha_0,f_\tau)/T_{(\alpha_0,f_\tau)} N_\tau$ injektiv und

$$\gamma \in P_{\tau,*}(\alpha_0,f_\tau)\langle T_{(\alpha_0,f_\tau)} N_\tau \rangle \Leftrightarrow \oint_{\partial B} \gamma \circ \xi \cdot t \circ \xi \; \mathrm{Re}\, v_0(\cdot;\tau)\,ds = 0$$

$$\oint_{\partial B} \gamma \circ \xi \cdot t \circ \xi \; v_1(\cdot;\tau)\,ds = 0$$

$$\oint_{\partial B} \gamma \circ \xi \cdot t \circ \xi \; \overline{v_1}(\cdot;\tau)\,ds = 0$$

wo t für die Normale von $\hat{f}$ auf ∂B steht.

Beweis:

Sei $\tau \in I$; es genügt, die Behauptung für die Familie (f_τ) zu beweisen.

Wir zeigen zunächst, daß $P_{\tau,*}(\alpha_o,f_\tau)/_{N_-}$ injektiv ist. Sei also $(\gamma,h) \in T_{(\alpha,f)} N_\tau$ mit $P_{\tau,*}(\alpha_o,f_\tau)(\gamma,h) = 0$. Das bedeutet, daß γ von der Form

$$\gamma(\phi) = v(\phi)t_1(\phi) \quad \text{mit } v : \partial B \to \mathbb{R},$$

also $\gamma \circ \xi$ tangential an α_τ ist.

Wegen Lemma 4.12. stellt dann h ein erzwungenes Jacobifeld dar:

$$h = 2 \operatorname{Re} \phi \frac{f_{\tau,z}}{z} \qquad \text{mit}$$

$$\phi(z) \in \operatorname{span}\{iz^2, z(z^2-1), iz(z^2+1), z^4-1, i(z^4+1)\}$$

(vgl. Bem. 2.23.) .

Die fünf Normalisierungsbedingungen, die man laut Lemma 4.10. zu fordern hat, haben zur Folge, daß notwendig $\phi \equiv 0$ gilt. Mithin ist $h \equiv 0 \Rightarrow \gamma \equiv 0$.

Erfüllt ein $\gamma \in E_\tau$ die drei Integralbedingungen, so liefert uns Lemma 4.15.

$$\text{mit } g_1 := \gamma \circ \xi \cdot \left| \frac{f_{\tau,r}}{f_{\tau,r}} \right|$$

$$g_2 := \gamma \circ \xi \cdot t \circ \xi = \gamma \circ \xi \cdot t_\tau$$

eine Lösung $h = 2 \operatorname{Re} \Phi \frac{f_{\tau,z}}{z} + N\, t_\tau$

mit $h/_{\partial B} = \gamma$ □

Es kommt nun darauf an, in $T_{\alpha_o} \mathcal{O}_o$ einen Unterraum zu finden, der im Bild von möglichst vielen N_τ's liegt. Dies gelingt mit Hilfe des Begriffs der "unendlichdimensionalen" Familie. (vgl. [12], § 1)

4.17. Definition:

Sei $\tau_o \in \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}$ eine Umgebung von τ_o, X ein Banach-Raum und $F : U \to X$ eine stetige Abbildung.

F heißt unendlichdimensional in τ_o, wenn es keine offene Umgebung V von τ_o gibt, so daß

$\bigcup_{\tau \in V} F(\tau)$ in einem endlichdimensionalen

Teilraum von X enthalten ist.

Für die Anwendung wichtig ist folgende Eigenschaft:

4.18. Satz:

Zusätzlich zu denVor. von 4.17. sei $\tau \to F(\tau)$ reell-analytisch, in U gelte: $F(\tau) = \sum_{j=o}^{\infty} F_j \cdot (\tau - \tau_o)^j$, $F_j \in X$

Dann gilt:

(i) Falls für jedes $m \in \mathbb{N}$ F_m linear unabhängig von $\{F_j\}_{j=0,\ldots,m-1}$ ist, so ist F in τ_o unendlichdimensional.

(ii) Falls F in τ_o unendlichdimensional ist, so gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ Parameterwerte $\tau_j \in U$, $j=1,\ldots,n$ so daß $\{F(\tau_j)\}_{j=1,\ldots,n}$ einen n-dimensionalen Raum aufspannt.

Beweis: siehe [12], Prop. 1.2. □

Mit den Funktionen von (4.1.1.), (4.1.2.) setzen wir

$$\omega_o(\phi;\tau) := \mathrm{Re}\, v_o(e^{i\phi};\tau)\ t(\xi(\phi;\tau))$$

$$\omega_1(\phi;\tau) := v_1(e^{i\phi};\tau)\ t(\xi(\phi;\tau))$$

$$\omega_2(\phi;\tau) := \overline{\omega_1(\phi,\tau)}$$

Durch Umparametrisieren mit

$$\phi = \zeta(\psi;\tau)$$

und Beachtung der Substitutionsregel für Integrale erhalten wir

$$\gamma \circ \xi \in E_\tau \Leftrightarrow \gamma(2\cdot) \in E_o$$

bzw. bezüglich des $L^2(\partial B)$- Skalarprodukts

$$\gamma \circ \xi \perp \omega_j(\phi;\tau) \Leftrightarrow \gamma(2\cdot) \perp \omega_j(\zeta,\tau)\ \frac{d\zeta}{d\psi} \text{ für } j=0,1,2$$

4.19. Lemma:

Für $\tau \in I$ ist $\tau \to (\omega_j(\zeta;\tau)\ \frac{d\zeta}{d\psi})_{j=0,1,2}$

unendlichdimensional in $\tau = 0$.

Beweis:

Wir berechnen $\frac{d\zeta}{d\psi}$.

Es ist $\frac{e^{2i\zeta}-\tau^2}{1-\tau^2 e^{2i\zeta}} = e^{2i\psi}$

$$\Rightarrow \quad \frac{2e^{i\zeta}(1-\tau^4)}{(1-\tau^2 e^{2i\zeta})^2}\, i\, e^{i\zeta}\, \frac{d\zeta}{d\psi} = 2i\, e^{2i\psi}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\zeta}{d\psi} = \frac{1-\tau^4}{(1+\tau^2 e^{2i\psi})(1+\tau^2 e^{-2i\psi})}$$

Durch Einsetzen und Berechnen der Potenzreihenentwicklungen in τ nach den Methoden von [12], § 1 folgt die Beh. □

Wir wählen nun im Umgebung von $\tau = 0$ $n \in \mathbb{N}$ Parameterwerte, so daß

$$\{\omega_j(\zeta,\tau_k)\ \frac{d\zeta}{d\psi}\}_{\substack{j=1,2,3 \\ k=1,\ldots,n}}$$

einen 3n-dimensionalen Unterraum von E_o aufspannen. Weiter können wir argumentieren wie in [12] 2.34/2.35. Es gilt:

4.20. Satz:

Seien die τ_j wie eben gewählt.
Dann gibt es für jedes j=1,...,n offene Umgebungen U_j von (α_o, f_{τ_j}) in N_{τ_j} und Untermannigfaltigkeiten V_j der Kodimension 3 in E_{τ_j}, so daß $P_{\tau_j}\, U_j$ diffeomorph auf V_j abbildet.
Die entsprechenden Untermannigfaltigkeiten $\tilde{V}_j$ in E_o schneiden sich transversal.

Daher ist $V := \bigcap_{j=1}^{n} \tilde{V}_j$ eine Untermannigfaltigkeit von E_o der Kodimension 3n.

Beweis: siehe [12], 2.35. □

Wir haben nun in E_c, dem Normalenbündel von α_o eine endlich-ko-dimensionale Untermannigfaltigkeit gefunden, die im Bild der Projektionen von n verschiedenen N_τ liegt.

Nach Konstruktion von N_τ bedeutet dies, daß jede Kurve $\in V$ als Urbilder mindestens n verschiedene H-Flächen besitzt, die konform nicht äquivalent sind. Zunächst sind diese α_o benachbarten Kurven nur Immersionen. Da aber die Einbettungen dicht liegen in den Immersionen und wir nur eine Mannigfaltigkeit endlicher Kodimension betrachten, gilt tatsächlich:

4.21. Satz:

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es in Umgebung der zweimal durchlaufenen Einheitskreislinie α_o Einbettungen, die n konform nicht äquivalente H-Flächen beranden. Die so konstruierten Flächen besitzen alle genau einen Verzweigungspunkt der Ordnung 1 im Innern.

Beweis: [12], § 3. □

5.1 Zur Differentialgeometrie von H-Flächen

Wir erinnern an die Ableitungsgleichungen der differentialgeometrischen Flächentheorie (siehe etwa [35], Kap. 3) und wenden sie auf unseren Fall an.

Sei $f \in C^3(B,\mathbb{R}^3)$ eine H-Fläche, d.h.

$$\Delta f = 2H\, f_x \wedge f_y \qquad \text{auf } B$$
$$f_x \cdot f_x = f_y \cdot f_y,\ f_x \cdot f_y = 0$$

f habe endlich viele innere Verzweigungspunkte. $\dot{B}$ bezeichne B ohne die Menge dieser Verzweigungspunkte. Alle folgenden Formeln sind nur auf $\dot{B}$ zu verstehen.

Wir setzen $\mu := |f_x| = |f_y|$ und die Normale $t := \frac{f_x \wedge f_y}{|f_x \wedge f_y|}$.

Die erste Fundamentalform der Fläche f wird bez. der Basis f_x, f_y im Tangentialraum dargestellt durch die Matrix

$$I = \begin{pmatrix} \mu^2 & 0 \\ 0 & \mu^2 \end{pmatrix} \qquad (5.1.1.)$$

Die zweite Fundamentalform werde bez. derselben Basis dargestellt als:

$$II = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

mit reellen Funktionen, $a,b,c : \dot{B} \to \mathbb{R}$.

Definitionsgemäß gilt:

$$a := -f_x \cdot t_x, \qquad b := -f_x \cdot t_y = -f_y \cdot t_x$$
$$c := -f_y \cdot t_y \qquad (5.1.2.)$$

Aus $t \cdot t = 1$ folgt $t_x \cdot t = t_y \cdot t = 0$.

Also:

$$t_x = -\frac{a}{\mu^2} f_x - \frac{b}{\mu^2} f_y$$

$$t_y = -\frac{b}{\mu^2} f_x - \frac{c}{\mu^2} f_y \qquad (5.1.3.)$$

$$t_x \cdot t_x = \frac{a^2+b^2}{\mu^2}, \quad t_y \cdot t_y = \frac{b^2+c^2}{\mu^2}$$

Weiter gilt:

$$t_{xx} \cdot t + t_x \cdot t_x = 0, \quad t_{yy} \cdot t + t_y \cdot t_y = 0$$

$$\Rightarrow \quad \Delta t \cdot t = -\frac{a^2+c^2+2b^2}{\mu^2} \qquad (5.1.4.)$$

Die Gauß'sche Krümmung κ berechnet sich als

$$\kappa = \frac{\det II}{\det I} = \frac{ac-b^2}{\mu^4} \qquad (5.1.5.)$$

und für die mittlere Krümmung H gilt:

$$2H\mu^2 = a+c \qquad (5.1.6.)$$

Definieren wir die Größe $d := a - H\mu^2$

$$= H\mu^2 - c \qquad (5.1.7.)$$

so können wir zeigen:

5.1. Lemma:

Die Funktion $t \cdot f_{zz} = \frac{-i}{2}(b+id)$ ist holomorph auf B.

$b+id$ hat das gleiche Nullstellenverhalten wie $\ldots$.

Beweis:

Es ist $t \cdot f_{zz} = \frac{1}{4} t \cdot (f_{xx} - f_{yy} - 2i f_{xy})$

$$= \frac{1}{4} (a-c-2ib)$$

$$= \frac{-i}{2} (b+id)$$

Wegen $a = f_{xx}\cdot t$, $b = f_{xy}\cdot t$ ist:

$$a_y = f_{xxy}\cdot t + f_{xx}\cdot t_y$$

$$b_x = f_{xyx}\cdot t + f_{xy}\cdot t_x$$

somit

$$a_y - b_x = f_{xx}\cdot t_y - f_{yx}\cdot t_x =$$

$$= f_{xx}\left(-\frac{b}{\mu^2} f_x - \frac{c}{\mu^2} f_y\right) - f_{yx}\left(-\frac{a}{\mu^2} f_x - \frac{b}{\mu^2} f_y\right)$$

$$= -\frac{a+c}{\mu^2} f_{yx}\cdot f_x =$$

$$= 2H\mu\,\mu_y$$

$$\Rightarrow \quad (a-H\mu^2)_y - b_x = d_y - b_x = 0$$

Analog folgt die andere Cauchy-Riemannsche Differentialgleichung. Das Nullstellenverhalten von a,b,c,d wird mittels der Formeln (5.1.2.) durch die Beschränktheit von t_x, t_y ([6], Lemma 1.4.) impliziert.

5.2. Die infinetesimalen Variationen von H-Flächen

Sei $f \in C^3(B,\mathbb{R}^3)$ eine H-Fläche wie in 5.1.; $h \in C^2(B,\mathbb{R}^3)$ erfülle die Gleichung:

$$\Delta h - 2H(f_x \wedge h_y + h_x \wedge f_y) = 0$$

Wir suchen Lösungen von der Form

$$h = Lf_x + Mf_y + Nt \qquad (5.2.1.)$$

mit reellen Funktionen $L,M,N : \dot{B} \to \mathbb{R}$ bzw. mit $\Phi = L+iM$

$$h = 2\mathrm{Re}\ \Phi f_z + Nt$$

Zunächst betrachten wir die infinitesimale Konformitätsbedingung:

5.2. Lemma:

Unter den genannten Voraussetzungen gilt:

$$h = 2\mathrm{Re}\ \Phi f_z + Nt \text{ erfüllt} \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_{\bar{z}} = \frac{d+ib}{\mu^2} N \qquad (5.2.2.)$$

$$f_z \cdot h_z \equiv 0 \text{ auf } B$$

Beweis:

$$h = \Phi f_z + \bar{\Phi} f_{\bar{z}} + Nt$$

$$h_z = \Phi_z f_z + \Phi f_{zz} + \bar{\Phi}_z f_{\bar{z}} + \bar{\Phi} f_{\bar{z}z} + N_z t + N t_z$$

$$h_z \cdot f_z = \bar{\Phi}_z f_{\bar{z}} \cdot f_z + N t_z \cdot f_z =$$

$$= \bar{\Phi}_z \frac{1}{2}\mu^2 + \frac{1}{4} N(t_x - it_y)\cdot(f_x - if_y) =$$

$$= \frac{1}{2} \bar{\Phi}_z \mu^2 + \frac{1}{4} N(-a+c+2ib) = 0 \qquad \square$$

5.3. Lemma:

Unter obigen Voraussetzungen gilt:

$$\Delta h = 2H(f_x \wedge h_y + h_x \wedge f_y) \quad \Leftrightarrow \quad \Phi_{\bar{z}} = \frac{d+ib}{\mu^2} N$$

$$h_z \cdot f_z \equiv 0 \qquad \Delta N - 2\mu^2(\kappa - 2H^2)N = 0$$

Beweis:

$$h = \Phi f_z + \bar{\Phi} f_{\bar{z}} + Nt$$

$$h_z = \Phi_z f_z + \Phi f_{zz} + \bar{\Phi}_z f_{\bar{z}} + \bar{\Phi} f_{\bar{z}z} + N_z t + N t_z$$

$$h_{\bar{z}} = \Phi_{\bar{z}} f_z + \Phi f_{z\bar{z}} + \bar{\Phi}_{\bar{z}} f_{\bar{z}} + \bar{\Phi} f_{\bar{z}\bar{z}} + N_{\bar{z}} t + N t_{\bar{z}}$$

$$h_{z\bar{z}} = \Phi_{z\bar{z}} f_z + \Phi_z f_{z\bar{z}} + \Phi_{\bar{z}} f_{zz} + \Phi f_{zz\bar{z}} +$$

$$+ \bar{\Phi}_{z\bar{z}} f_{\bar{z}} + \bar{\Phi}_z f_{\bar{z}\bar{z}} + \bar{\Phi}_{\bar{z}} f_{\bar{z}z} + \bar{\Phi} f_{\bar{z}z\bar{z}}$$

$$+ N_{z\bar{z}} t + N_z t_{\bar{z}} + N_{\bar{z}} t_z + N t_{z\bar{z}}$$

$$0 = t\cdot(h_{z\bar{z}} - iH(h_{\bar{z}}\wedge f_z + f_{\bar{z}}\wedge h_z)) =$$

$$= t\cdot(\Phi_z f_{zz} + \Phi_z f_{zz} + \Phi f_{zzz} + \Phi_z f_{zz} + \Phi_z f_{zz} + \Phi f_{zzz}) + N_{zz} + Nt_{zz}\cdot t +$$

$$- iH\, t\cdot(\bar{\Phi}_{\bar{z}} f_{\bar{z}}\wedge f_z + \bar{\Phi} f_{\bar{z}\bar{z}}\wedge f_z) - iHNt_{\bar{z}}\wedge f_z\cdot t +$$

$$- iH\, t\cdot(\Phi_z f_{\bar{z}}\wedge f_z + \Phi f_{\bar{z}}\wedge f_{zz}) - iHNf_{\bar{z}}\wedge t_z\cdot t =$$

$$= t\cdot\Phi_z\cdot f_{zz} - iHf_z/f_z; + t\cdot\Phi_z\cdot f_{zz} - iHf_z/f_z; + t\cdot\Phi f_{zzz} - iHf_z/f_{zz};$$

$$\overset{\cdot\cdot}{0} \qquad\qquad \overset{\cdot\cdot}{0} \qquad + t\cdot\bar{\Phi}(f_{zz\bar{z}} - iHf_{z\bar{z}}\wedge f_z) +$$

$$+ N_{z\bar{z}} + Nt_{z\bar{z}}\cdot t - HiNt_{\bar{z}}\wedge f_z\cdot t - HiNf_{\bar{z}}\wedge t_z\cdot t + \overset{\cdot\cdot}{0}$$

$$+ \Phi_{\bar{z}} f_{zz}\cdot t + \bar{\Phi}_z f_{z\bar{z}}\cdot t =$$

$$= N_{z\bar{z}} + Nt_{z\bar{z}}\cdot t + 2HN\ \mathrm{Re}\ it_z\wedge f_{\bar{z}}\cdot t - \Phi_{\bar{z}} f_z\cdot t_z - \bar{\Phi}_z f_z\cdot t_{\bar{z}} =$$

$$= \frac{1}{4}\Delta N - \frac{1}{4}N\frac{a^2+c^2+2b^2}{\mu^2} + \frac{1}{2}HN\ \mathrm{Re}\{(f_x+if_y)/i\cdot(t_x-it_y)\} - \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,\bar{\Phi}_z(f_x+if_y)(t_x+it_y)$$

$$= \frac{1}{4}\Delta N - \frac{1}{4}N\frac{a^2+c^2+2b^2}{\mu^2} + \frac{1}{2}HN(-f_x\cdot t_x - f_y\cdot t_y) + \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,N\frac{a-c-2ib}{2\mu^2}(a+c-2ib)$$

$$= \frac{1}{4}\Delta N - \frac{1}{4}N\{\frac{a^2+c^2+2b^2}{\mu^2} - 2H(a+c) + \frac{-(a-c)^2-4b^2}{\mu^2}) =$$

$$= \frac{1}{4}\Delta N - \frac{1}{4}N\frac{1}{\mu^2}\{2ac - 2b^2 - 4H^2\mu^4\} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \Delta N - 2\mu^2(\kappa - 2H^2)N = 0$$

Um die Äquivalenz zu zeigen, müssen wir noch nachweisen, daß

$$\{h_{z\bar{z}} - iH(h_{\bar{z}} \wedge f_z + f_{\bar{z}} \wedge h_z)\} \cdot f_z = 0$$

Es ist

$$\{h_{z\bar{z}} - iH(h_{\bar{z}} \wedge f_z + f_{\bar{z}} \wedge h_z)\} \cdot f_z = h_{z\bar{z}} \cdot f_z - iH\, f_{\bar{z}} \wedge h_z \cdot f_z =$$

$$= \phi\, f_{zz\bar{z}} \cdot f_z + \phi_{z\bar{z}}\, f_{\bar{z}} \cdot f_z + \phi_z\, f_{\bar{z}\bar{z}} \cdot f_z + \phi\, f_{\bar{z}\bar{z}z} \cdot f_z + N_z\, t_{\bar{z}} \cdot f_z + N_{\bar{z}}\, t_z \cdot f_z + N\, t_{z\bar{z}} \cdot f_z +$$

$$- iH\, f_{\bar{z}} \wedge f_{zz} \cdot f_z - iH\, f_{\bar{z}} \wedge f_{\bar{z}z} \cdot f_z + iH\, N_z\, t \cdot f_{\bar{z}} \wedge f_z =$$

$$= \phi\, f_z \cdot (f_{z\bar{z}z} - iH\, f_{\bar{z}} \wedge f_{zz}) + \phi\, f_z \cdot (f_{z\bar{z}\bar{z}} - iH\, f_{\bar{z}} \wedge f_{\bar{z}z}) - N_z\, t \cdot (f_{z\bar{z}} - iH\, f_{\bar{z}} \wedge f_z) +$$

$$- (\phi_z\, f_z \cdot f_{\bar{z}})_{\bar{z}} + N_{\bar{z}}\, t_z \cdot f_z + N\, t_{z\bar{z}} \cdot f_z =$$

$$= \frac{1}{2}\{(d-ib)N\}_{\bar{z}} + \frac{1}{2}\, N_{\bar{z}}(-d+ib) + N\, t_{z\bar{z}} \cdot f_z = 0, \text{ wegen Lemma 5.1.}$$

Aus $t \cdot f_z \equiv 0$ folgt $t_z \cdot f_z + t\, f_{zz} \equiv 0$

Wegen der Holomorphie $(t_z \cdot f_z)_{\bar{z}} = 0 = t_{z\bar{z}} \cdot f_z + t_z \cdot f_{z\bar{z}} = t_{z\bar{z}} \cdot f_z$. □

Die linearisierte Gleichung in der komplexen Form

$$h_{z\bar{z}} = iH(h_{\bar{z}} \wedge f_z + f_{\bar{z}} \wedge h_z)$$

läßt sich auffassen als Gleichung erster Ordnung für die Abbildung $g := h_z$, nämlich

$$g_{\bar{z}} = iH(\bar{g} \wedge f_z + f_{\bar{z}} \wedge g), \qquad (5.2.4.)$$

und umgekehrt gibt es zu einem solchen g auch eine Lösung h. Daraus gewinnen wir eine neue Darstellungsformel:

5.4. Lemma:

Seien $\phi, N : \dot{B} \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar.
Dann ist $g := \phi f_z + Nt$ Lösung von (5.2.4.) mit $g \cdot f_z \equiv 0$ genau dann, wenn ϕ und N das folgende System erfüllen:

$$\phi_{\bar{z}} - \frac{d+ib}{\mu^2} N + H\bar{N} = 0$$

$$N_{\bar{z}} - \frac{1}{2} H\mu^2 \bar{\phi} = 0 \qquad \text{auf } \dot{B} \qquad (5.2.5.)$$

Beweis:

Ist $g = \phi f_z + Nt$, so ist

$$g_{\bar{z}} = \phi_{\bar{z}} f_z + \phi f_{z\bar{z}} + N_{\bar{z}} t + Nt_{\bar{z}} .$$

Eingesetzt in (5.2.4.), ergibt sich:

$$g_{\bar{z}} - iH(\bar{g} \wedge f_z + f_{\bar{z}} \wedge g) =$$

$$= \phi_{\bar{z}} f_z + \phi f_{z\bar{z}} + N_{\bar{z}} t + N t_{\bar{z}} - iH(\phi f_{\bar{z}} + \bar{N} t) \wedge f_z +$$

$$- iH\, f_{\bar{z}} \wedge (\phi f_z + N t)$$

Wir multiplizieren nacheinander mit $f_z, f_{\bar{z}}, t$ und erhalten:

(i) $\quad N t_{\bar{z}} \cdot f_z - iH\, N f_{\bar{z}} \wedge t \cdot f_z = 0$

(ii) $\quad \phi_{\bar{z}} f_z \cdot f_{\bar{z}} + N t_{\bar{z}} \cdot f_{\bar{z}} - iH\, \bar{N} t \wedge f_z \cdot f_{\bar{z}} =$

$$= \phi_{\bar{z}} \quad \frac{1}{2}\mu^2 - \frac{1}{2}(d+ib)N + \frac{1}{2}H\mu^2\, \bar{N}$$

(iii) $\quad \phi f_{z\bar{z}}\, t + N_{\bar{z}} - iH\, \phi f_{\bar{z}} \wedge f_z \cdot t$

$$- iH\, \bar{\phi} f_{\bar{z}} \wedge f_z \cdot t =$$

$$= N_{\bar{z}} - iH\, \bar{\phi} f_{\bar{z}} \wedge f_z \cdot t =$$

$$= N_{\bar{z}} - \frac{1}{2}\mu^2 H\, \bar{\phi}$$

Daraus folgt die Beh. □

Liste der Bezeichnungen und Definitionen

H-Extremale	Def. 1.1.; S. 1o
Konformitätsbedingung	Def. 1.1.; S. 1o
H-Fläche	Def. 1.1.; S. 1o
Plateau-Problem	Def. 1.2.; S. 13
Menge der H-Extremalen $\mathcal{H}$	Def. 1.6.; S. 19
Fortsetzungsoperator Θ	Def. 1.13.; S. 26
$\mathcal{D}$, $\mathcal{A}$, Bündel η	Def. 1.14.; S. 27
Konformitätsoperator K	Def. 2.1.; S. 35
erzwungenes Jacobifeld	Def. 2.13.; S. 42
Verzweigungspunkt	Def. 2.15.; S. 43
$J(\underline{z},\underline{\lambda})$	Def. 2.24.; S. 5o
$\mathcal{H}(\underline{z},\underline{\lambda})$, $\mathcal{H}^{\underline{\lambda}}$ ($\mathcal{H}$ mit vorgeschr. Verzweigungsverhalten)	Def. 3.1.; S. 56
$\eta(\underline{z},\underline{\lambda})$, $\eta^{\underline{\lambda}}$	Def. 3.7.; S. 63
$Y(\underline{z},\underline{\lambda})$	Def. 3.9.; S. 64
modifizierter Konformitäts-Operator $\tilde{K}$	Def. 3.13.; S. 7o
Nullstellenmenge N von K, $\pi_{/N}$	S. 72
$\tilde{f}$, f_τ , $q(.,\tau)$	Def. 4.1.; S. 77
α_o, η_o, π_o, N_t	Def. 4.7.; S. 8o
ν , t, Koeffizienten der 2.Fundamentalform a,b,c,d	(5.1.1) - (5.1.7)

Literaturverzeichnis

[1] Abraham, R.: Lectures of Smale on Differential Topology
Columbia University, New York 1962

[2] Abraham, R.; Robbin, J.: Transversal Mappings and Flows
Benjamin, New York - Amsterdam, 1967

[3] Adams, R.A.: Sobolev Spaces
Academic Press, New York - San Francisco - London, 1975

[4] Agmon, S.; Douglis, A.; Nirenberg, L.: Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions
part I, Commun. Pure Appl.Math. 12 (1959), 623-727

[5] part II, Commun. Pure Appl.Math. 17 (1964), 35-92

[6] Alt, H.W.: Verzweigungspunkte von H-Flächen I
Math.Z. 127 (1972), 333-362

[7] Behnke, H.; Sommer, F.: Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen
Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1976

[8] Berger, M.S.: Nonlinearity and Functional Analysis
Academic Press, New York - San Francisco - London, 1977

[9] Bers, L.; John, F.; Schechter, M.: Partial Differential Equations
Interscience Publishers, New York - London - Sydney, 1964

[10] Böhme, R.: Die Jacobifelder zu Minimalflächen im $\mathbb{R}^3$
manuscr.math. 16 (1975), 51-73

[11] Böhme, R.: Über Stabilität und Isoliertheit der Lösungen des klassischen Plateau-Problems
Math.Z. 158 (1978), 211-243

[12] Böhme, R.: A Plateau problem with many solutions
erscheint in Arch.Ration.Mech.Anal.

[13] Böhme, R.: New results on the classical problem of Plateau. On the existence of many solutions.
Seminaire BOURBAKI, 579 (1981)

[14] Böhme, R.; Tomi, F.: Zur Struktur der Lösungsmenge des Plateau-Problems
Math.Z. 133 (1973), 1-29

[15] Böhme, R.; Tromba, A.J.: The index theorem for classical minimal surfaces
Ann.Math. 113 (1981), 447-499

[16] Ebin, D.G.; Marsden, J.: Groups of diffeomorphisms and the notion of an incompressible fluid
Ann.Math. 92 (1970), 102-163

[17] Eells, J.: A setting for global analysis
Bull.Am.Math.Soc. 72 (1965), 751-807

[18] Gilbarg, D.; Trudinger, N.S.: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order
Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1977

[19] Heinz, E.: Über die Existenz einer Fläche konstanter mittlerer Krümmung bei vorgegebener Berandung
Math.Ann. 127 (1954), 258-287

[20] Heinz, E.: Über die Eindeutigkeit beim Cauchyschen Anfangswertproblem einer elliptischen Differentialgleichung 2. Ordnung
Nachr.Akad.Wiss.Gött., II. math.-phys. Klasse (1955), 1-12

[21] Heinz, E.: On the existence problem for surfaces of constant mean curvature
Commun.Pure Appl.Math. 9 (1956), 467-470

[22] Heinz, E.: Ein Regularitätssatz für Flächen beschränkter mittlerer Krümmung
Nachr.Akad.Wiss. Gött., II. math.-phys. Klasse (1969), 107-118

[23] Heinz, E.: On the nonexistence of a surface of constant mean curvature with finite area and prescribed rectifiable boundary
Arch.Ration.Mech.Anal. 35 (1969), 249-252

[24] Heinz, E.: Über das Randverhalten quasilinearer elliptischer Systeme mit isothermen Parametern
Math.Z. 113 (1970), 99-105

[25] Heinz, E.; Hildebrandt, S.: The number of branch points of surfaces of bounded mean curvature
J.Differ.Geom. 4(1970), 227-235

[26] Hildebrandt, S.: Über Flächen konstanter mittlerer Krümmung
Math.Z. 112 (1969), 107-144

[27] Hildebrandt, S.: Einige Bemerkungen über Flächen beschränkter mittlerer Krümmung
Math.Z. 115(1970), 169-178

[28] Hildebrandt, S.: On the Plateau-problem for surfaces of constant mean curvature
Commun.Pure Appl.Math. 23 (1970), 97-114

[29] Hirsch, M.W.: Differential Topology
Springer, New York - Heidelberg - Berlin, 1976

[30] Husemoller, D.: Fibre Bundles
Springer, New York - Heidelberg - Berlin, 1975

[31] Isenberg, C.: The Science of Soap Films and Soap Bubbles
Clevedon, 1978

[32] Jäger, W.: Ein Maximumprinzip für ein System nichtlinearer Differentialgleichungen
Nachr.Akad.Wiss.Gött., II. math.-phys. Klasse
(1976), 157-164

[33] Kato, T.: Perturbation Theory for Linear Operators
Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1976

[34] Kaul, H.: Eindeutigkeit von Lösungen elliptischer Systeme
in: Vorlesungsreihe SFB 72 no. 4
Analysis-Seminar SS 1980, Bonn 1980

[35] Klingenberg, W.: Eine Vorlesung über Differentialgeometrie
Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1973

[36] Lang, S.: Differential Manifolds
Addison-Wesley Publ.Co., Reading 1972

[37] Lions, J.L.; Magenes, E.: Non-homogeneous boundary value problems and applications I
Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1972

[38] Morrey, C.B.: Multiple Integrals in the Calculus of Variations
Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1966

[39] Nitsche, J.C.C.: Vorlesungen über Minimalflächen
Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1976

[40] Otto, Frei (Hrsg.): Zugbeanspruchte Konstruktionen, Band 1 und 2
Ullstein, Frankfurt - Berlin, 1962/1966

[41] Otto, Frei (Hrsg.): Netze in Natur und Technik, Mitteilungen des Instituts für leichte Flächentragwerke
IL8, Stuttgart 1975

[42] Palais, R.S.: Foundations of Global Non-linear Analysis
Benjamin, New York 1968

[43] Ruchert, H.: Ein Eindeutigkeitssatz für Flächen konstanter mittlerer Krümmung
Arch.Math. 33 (1979), 91-104

[44] Schüffler, K.: Stabilität mehrfach zusammenhängender Minimalflächen
manuscr. math. 30 (1979), 163-198

[45] Steffen, K.: Flächen konstanter mittlerer Krümmung mit vorgegebenem Volumen oder Flächeninhalt
Arch.Ration.Mech.Anal. 49 (1972), 99-128

[46] Tomi, F.: On the local uniqueness of the problem of least area
Arch.Ration.Mech.Anal. 52 (1973), 312-318

[47] Tomi, F.: A perturbation theorem for surfaces of constant mean curvature
Math.Z. 141 (1975), 253-264

[48] Tomi, F.; Tromba, A.J.: Extreme curves bound embedded minimal surfaces of the type of the disc
Math.Z. 158 (1978), 137-145

[49] Tomi, F.; Tromba, A.J.: On the structure of the set of curves bounding minimal surfaces of prescribed degeneracy
J.Reine Angew.Math. 316 (1980), 31-43

[50] Tromba, A.J.: Some theorems on Fredholm maps
Proc.Am.Math.Soc. 34 (1972), 578-585

[51] Tromba, A.J.: Fredholm vector field and a transversality theorem
J.Funct.Anal. 23 (1976)

[52] Tromba, A.J.: On the number of simply connected minimal surfaces spanning a curve
Mem.Am.Math.Soc. no. 194, 12 (1977)

[53] Wendland, W.L.: Elliptic Systems in the Plane
Pitman, London - San Francisco - Melbourne, 1979

[54] Wente, H.C.: An existence Theorem for surfaces of constant mean curvature
J. Math.Anal.Appl. 26 (1969), 318-344

[55] Werner, H.: Das Problem von Douglas für Flächen konstanter mittlerer Krümmung
Math.Ann. 133 (1957), 303-319

[56] Wolf, K.L.: Tropfen, Blasen und Lamellen
Springer, Berlin - Heidelberg - New York, 1968

Michael Söllner

Soldnerstraße 17
463o Bochum 1

Lebenslauf

Michael Söllner, Dipl.-Math., geb. am 28.1o.1953 in Hof/Saale

Vater: Erwin Söllner, Rektor

Mutter: Edith Söllner, geb. Eyßelein ;

seit 29.9.1979 verheiratet mit

Dipl.-Biol. Brigitte Söllner, geb. Weber

Sept.196o - Aug.1964	Volksschule in Hof
Sept.1964 - Mai 1973	Schillergymnasium Hof (math.-naturw.Gymn.)
Mai 1973	Reifeprüfung
Juli 1973 - Okt.1974	Grundwehrdienst bei der Bundeswehr
Okt. 1974 - Mai 1979	Studium der Mathematik (Nebenfach: Theoretische Physik) an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen/Nürnberg Ausbildung bei Prof. W. Barth, H. Bauer, H. Berens , R. Böhme, M. Huber;
Nov. 1976	Vordiplom ("gut")
Mai 1979	Diplom-Hauptprüfung ("sehr gut")
seit Aug.1979	Verwalter der Stelle eines wissenschaftlichen Assistenten am Lehrstuhl von Prof. R. Böhme, Ruhr-Universität Bochum

DER DRUCKER - Buscheystraße 138 - 4630 Bochum - Tel. (02 34) 70 41 16